UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA Y LA FÍSICA

TESIS

ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA MEJORAR EL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS INTEGRALES DOBLES Y SU SOLUCIÓN USANDO UN SOFTWARE INTERACTIVO GEOGEBRA EN ESTUDIANTES DE DIFERENTES CARRERAS DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA

PRESENTA

LIC. ARANZAZU NIEBLAS AGUILAR

QUE COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA Y LA FÍSICA

DIRECTORES DE TESIS

DRA. MARÍA GUADALUPE RUSSELL NORIEGA

DR. JORGE CARLOS AVILA GAXIOLA

CULIACÁN ROSALES, SINALOA, FEBRERO DE 2023

AGRADECIMIENTOS

A mis directores de tesis **Dr. María Guadalupe Russell Noriega** y **Dr. Jorge Carlos Ávila Gaxiola** por su apoyo en el presente proyecto de investigación, para culminar la Maestría en Enseñanza de la Matemática y Física. Por su guía y formación tanto en el ámbito académico, como en el personal.

Al programa de **Posgrado Maestría en Enseñanza de la Matemática y la Física** de la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Sinaloa.

A todos y cada uno de los **Maestros**, de la Maestría en Enseñanza de la Matemática y la Física en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Sinaloa, por sus conocimientos, experiencias y consejos brindados durante la realización de mis estudios de Maestría.

A mis padres por ser un apoyo incondicional y un pilar en mi vida. Les agradezco por guiarme durante todos estos años de mi vida.

A mis hermanos les agradezco por todas las experiencias y buenos momentos felices que vivimos juntos alegrándome los días. Creciendo juntos, ayudándonos y divirtiéndonos.

A todas aquellas personas que, directa o indirectamente, me ayudaron durante este tiempo en la realización de este proyecto de investigación.

1. ÍNDICE

2. ÍNDICE DE TABLAS

3. ÍNDICE DE FIGURAS

4. INTRODUCCIÓN

En las universidades han aparecido nuevos retos y desafíos, los desarrollos en tecnologías exigen que los licenciados e ingenieros que se forman en las instituciones de educación superior hagan frente al proceso de globalización y se vuelvan competitivos en el mercado nacionales e internacionales, esto lleva a hacer un replanteamiento de la motivación de las matemáticas, los contenidos y la metodología de aprendizaje, incentivando el desarrollo de las capacidades de creatividad, innovación y razonamientos para la solución de problemas del área especializada en que se desarrolla la profesión (Trejo Trejo, et al., 2013).

Hoy en día, la tecnología está influyendo en la preferencia del estilo de aprendizaje en los estudiantes desde el comienzo de su educación. En un mundo interconectado, la integración de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas aborda las necesidades e intereses de aprendizaje de muchos de nuestros alumnos. Como lo menciona (Wassie y Zergaw, 2018) la tecnología influye en los estilos de aprendizaje de nuestros estudiantes. Muchos estudiantes prefieren ver, tocar y comprender lo que aprenden en la escuela. Los académicos también han deducido que la alfabetización tecnológica es una habilidad esencial de la enseñanza con el poder de motivar y crear oportunidades para que los estudiantes comprendan, construyan y exploren nuevos enfoques para la resolución de problemas (Bray y Tangney, 2017; Lawless y Pellegrino, 2007; Mainali y Key, 2012; Wassie y Zergaw, 2019).

Inicialmente se pensó que un conocimiento básico en la matemática y algo de habilidad pedagógica era suficiente para realizar la actividad docente en el área de la matemática. Recientemente se ha establecido que gran parte de los problemas tienen sus orígenes en aspectos cognitivos (como aprendemos), didácticos (como enseñamos) y epistemológicos (como concebimos el saber a enseñar y aprender). Lo anterior impacta directamente en el ambiente social de la interacción entre el estudiante, profesor y el conocimiento matemático volviendo a replantear las formas y momentos de cómo realizar el proceso de enseñanza-aprendizaje (Salinas y Alanís, 2009).

Podemos definir los elementos de una estrategia didáctica en la parte del profesor como el diseño de procedimientos (métodos, técnicas, actividades, etc.) y la aplicación de estos procedimientos. Las estrategias didácticas ordenan las acciones de manera consciente para construir y lograr metas planteadas en el proceso de la enseñanza y aprendizaje, siendo adaptadas a las necesidades de los participantes. Podemos clasificar las estrategias didácticas según el agente que las realiza de la forma siguiente: estrategias de enseñanza, estrategias instruccionales, estrategias de aprendizaje y estrategias de evaluación (Feo, 2010).

Investigaciones realizadas desde 1980 han reportado que la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas presentan uno de los mayores dentro de cualquier modelo educativo. Destacan principalmente los indicadores de promoción y repetición en los cursos de matemáticas para el nivel de educación superior, estos indicadores se encuentran ligados a la condición de frustración para los profesores y estudiantes, esta condición refuerza la importancia de analizar y mejorar estos procesos de enseñanza (García Retana, 2013).

Fernando Hitt en la década de los 90’ (1998) analizo los esquemas de la matemática y las representaciones internas, menciona que se observaban las mejoras que podrían obtenerse al implementar metodologías de enseñanza y aprendizaje utilizando desarrollos tecnológicos que mostraran representaciones graficas. Menciona también que el uso de la tecnología al ser aplicada en la educación permite nuevas posibilidades en los procesos de enseñanza y aprendizaje (Villagrán-Cáceres, et al., 2018).

Históricamente, las herramientas tecnológicas han jugado un papel importante en la enseñanza de las matemáticas, desde ábacos, tabletas de escritura y manipuladores físicos hasta calculadoras, computadoras, pizarras blancas interactivas y similares (Akcay, 2017)

Para la asignatura de Calculo Vectorial el contenido gira principalmente al entendimiento de los gráficos en dos y tres dimensiones debido a la interpretación necesaria de las funciones matemáticas, así como la asimilación y comprensión de los conceptos para la realización de gráficos para visualizar superficies, permitiendo eliminar la confusión entre el objeto y su representación. La función recomendada para el docente para este caso, es la renovación y creación de estrategias de enseñanza haciendo uso del cómputo y software disponibles, buscando aumentar el interés y la atención en los jóvenes (Ruiz, et al., 2019). Esta es una más de las razones de la importancia de utilizar el software interactivo GeoGebra en los procesos de enseñanza aprendizaje del Calculo Vectorial.

Actualmente el software GeoGebra se puede considerar muy versátil ya que permite utilizarlo de diferentes maneras, como caso particular un docente de educación superior puede utilizarlo en materias del Calculo diferencial, integral y vectorial, para crear el contenido y recursos educativos digitales que sean interactivos, sin ser necesario tener conocimientos avanzados de programación (Del Río, 2020), en este trabajo se establece con la herramienta tecnológica de GeoGebra el propósito de investigar los resultados positivos, al implementar una estrategia didáctica con el sentido de innovar y mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje para la materia de Calculo Vectorial.

5. CONSTRUCCIÓN DEL OBJETO DE ESTUDIO

5.1 Antecedentes del problema

Muchos estudios realizados en diferentes países expresan que los problemas con la enseñanza aprendizaje de las matemáticas no son solo de orden locales o regionales sino también de orden mundial(Artigue, et al., 2000; Camarena Gallardo, 2010). El estudio de estos problemas se ha realizado cualitativamente como cuantitativamente en las últimas tres décadas de forma exhaustiva y detallada, evidentemente aún se está lejos de poder darles solución, esto ha propiciado la creación de una nueva disciplina del conocimiento a la que llamamos “Educación Matemática” la cual está más allá de ser un simple cruce entre las matemáticas y la pedagogía (García, 2013).

Es un proceso con alto grado de complejidad y abstracción enseñar y aprender sobre Calculo Vectorial por los objetos matemáticos que allí se estudian; por esta razón es necesario un pensamiento matemático avanzado que supone un ritmo de aprendizaje diferente para cada estudiante. Debido a esta problemática , son varias las publicaciones de investigaciones en educación Matemática sobre cómo enseñar cálculo vectorial en el ámbito universitario (Rojas-Celis y Cely-Rojas, 2020).

El proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo es importante en la formación de estudiantes de diversas carreras, en particular en la Universidad Autónoma de Sinaloa, existe un porcentaje alto de carreras del área ciencias naturales y exactas donde se imparte la materia de Cálculo. En estas carreras, el aprendizaje de las matemáticas es primordial (Cantoral, 2001), ya que tiene un fuerte impacto en términos de solución de problemas y en la capacidad de comunicación de resultados. Sin embargo, tenemos que reconocer que el aprendizaje de las matemáticas es uno de los problemas más significativos en todos los niveles de los sistemas educativos, incluido el nivel superior (García Retana, 2013). En específico el tema de Cálculo Integral representa para los estudiantes de cualquier carrera un reto de comprender y aprobar.

Investigaciones realizadas por Artigue (1995) y, Salinas y Alanís (2009) en el caso del Cálculo, dejaron evidencias de que las matemáticas en forma general y particularmente el cálculo se han enseñado de forma mecanizada, llevando el aprendizaje a solo practicas algorítmicas y algebraicas sin tratar de desarrollar el razonamiento de los estudiantes (Idris, 2009), en donde los estudiantes priorizan solo la obtención de una respuesta (ojalá la correcta), sin tomar importancia del proceso que lleva a obtener esta, lo cual tiene como consecuencia un aprendizaje sin comprensión (Garcia Retana, 2009; García Retana, 2013). Como resultado de esto la enseñanza de los principios del Cálculo, resulta bastante complicada aun cuando los profesores somos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver algunos problemas estándar de forma más o menos mecánica, estas acciones están muy lejos de lo que esperamos sea una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas (Moreno Moreno, 2005). En un estudio de Artigue (2000) establece que muchas de las investigaciones en educación matemática relativas al tema coinciden en que no es fácil para los estudiantes insertarse en el campo del Análisis Matemático (como el cálculo), ya que este no se puede reducir a una versión puramente algebraica (García Retana, 2013).

Aunado a lo anterior la complejidad en el estudio del Cálculo Vectorial se da por las exigencias de un pensamiento matemático de mayor nivel (Costa, et al., 2014). Se menciona también que es un obstáculo para la comprensión del concepto de los objetos matemáticos de estudio y su vínculo con otras áreas, cuando se aplica la enseñanza tradicional, mecanizada, sin contexto y demasiado técnica, en los aprendizajes más simples del Calculo a nivel universitario (Costa, et al., 2014; McCartan, et al., 2010; Moreno Moreno, 2005), por ello es de importancia proponer una enseñanza del Calculo vinculando los conceptos y contexto que ayuden a relacionarlas con otras áreas del conocimiento (Salinas y Alanís, 2009).

Según lo descrito por (Salinas y Alanís, 2009), en un revisión de diferentes investigaciones que resumen resultado de nivel mundial sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje encontraron que ha sido practicado en la enseñanza del Calculo el modelo tradicional, este modelo de aprendizaje es fuertemente cuestionado lo cual lo muestran diferentes investigaciones realizadas en instituciones donde se puede identificar este modelo.

El aprendizaje del Cálculo, que es una asignatura que se cursa en los niveles de educación medio y superior; es cuestionado por los estudiantes a través de expresiones como ¡de qué me servirá aprender el cálculo o en qué lo voy a aplicar en mi vida real!; la mayoría de los estudiantes buscan carreras que no cuenten en su mapa curricular materias relacionadas con las matemáticas, debemos ayudarlos a salir de ese error, “ya que seas ingeniero o licenciado, sabemos que las matemáticas siempre van a ser la base importante de cualquier formación profesional” (Novelo, et al., 2015),debemos mostrarles que las matemáticas son indispensables en cualquier campo de conocimiento ya que ayudar a mejorar el razonamiento y la forma de pensar de los estudiantes (Jiménez y Jiménez, 2017).

Artigue (1995) publico una realidad que en esa época era difícil de justificar. La problemática de enseñanza-aprendizaje del Cálculo era clara: esta se base en una enseñanza tradicional que conlleva realizar prácticas solo algorítmicas y algebraicas la cual se enseña de esa forma y también se evalúa igual esto provoca una gran dificultad para alcanzar que los estudiantes obtengan una comprensión satisfactoria de sus conceptos y métodos Para el año del 2001, la situación no había cambiado: la gran mayoría de los estudiantes creen que la forma más segura para aprender o aprobar la materias de Calculo es no tratar de comprender sino solo de funcionar mecánicamente" (Holton, et al., 2001, p. 213). Como señalan Lagrange, Artigue, Laborde y Trouche (2003) la problemática se caracteriza por un sentimiento general de crisis que, sí parece trascender las diferencias culturales, aunque no sea percibido de la misma manera,. Y concluyen que: las dificultades en el aprendizaje del Calculo siguen siendo muy similares no han presentado cambios significativos.

Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo de varias variables en nivel superior podemos observar que los estudiantes se enfrentan y expresan la dificultad de comprender los temas complejos, es una problemática bien conocida, existen algunos trabajos de investigación que tratan estas problemáticas y plantean algunas soluciones algunos ya fueron mencionados en los párrafos anteriores y otros ejemplos están dados en (Del Rio, 2016; Gotte y Mantica, 2012) quienes en su investigación afirman que los estudiantes universitarios tienen que pasar por grandes dificultades al dar el salto entre el estudio del cálculo en una variable al estudio del cálculo en dos variables. Lo cual logre detectar y comprobar en base a mi experiencia a lo largo de estos 6 años en que he impartido la materia de Cálculo Vectorial en la Facultad de Informática Culiacán (FIC), en la carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones, Sistemas y Electrónica (ITSE), reflejándose en los estudiantes una dificultad para aprender y comprender lo que son las integrales dobles y su evaluación.

La problemática se presenta desde las materias de Cálculo Integral, Cálculo Vectorial y Métodos Matemáticos, que son por lo general impartidas desde primero hasta quinto semestre. Esencialmente cuando los estudiantes no logran relacionar las ecuaciones de varias variables con su representación gráfica como lo mencionan "estas actividades resultan ser difíciles para los estudiantes, ya que para poder realizar estas relaciones, los estudiantes necesitan acudir a la visualización" (Gatica y Ares, 2012), dificultando el poder proponer y encontrar soluciones a ejercicios del cálculo de áreas y volúmenes. La visualización para ejercicios de una dimensión (1D) así como también de dos dimensiones (2D) pueden ser abordados en el aula por el profesor de manera sencilla con las gráficas en un pizarrón o una presentación y el estudiante puede con relativa facilidad entender, reproducir y utilizar los gráficos para plantear soluciones. Para el caso de la visualización de ejercicios en tres dimensiones (3D) abordarlos en aula se vuelve un verdadero reto para el profesor, transmitir el concepto de un gráfico que representa una superficie en R^3, y para el estudiante puede volverse una idea abstracta difícil de comprender, no reproducible y complicado de utilizarlo para el planteamiento de una solución.

Haciendo reflexión de nuestro quehacer en la práctica, como docentes de la asignatura de Calculo, somos conscientes y evidenciamos las dificultades que presentan los estudiantes para aprender un curso de cálculo vectorial debido a la falta de comprensión de objetos matemáticos que fueron estudiados en cursos anteriores, no adquirir la costumbre o formar el hábito de leer matemáticas, la falta de motivación intrínseca al abordar el curso, y su desinterés percibido en el desarrollo de la clase donde, normalmente, están a la espera de cada clase para escribir lo que el profesor explica sin razonarlo primero. A esto podemos agregar el poco o inadecuado uso de herramientas tecnológicas para el desarrollo de las clases; ya que con frecuencia los estudiantes hacen uso de software matemáticos (motores de cálculo en línea como WolframAlpha y Symbolab, o aplicaciones para celular como Photomath) solamente para verificar los resultados o pasos de alguna solución en los ejercicios algebraicos y no como una herramienta que les facilita visualizar y comprender conceptos matemáticos (Rojas-Celis y Cely-Rojas, 2020).

Las consecuencias de esta problemática recaen en primer lugar en los estudiantes que no logran terminar sus estudios de nivel superior, en segundo lugar, afectan los porcentajes de deserción de la Universidad Autónoma de Sinaloa, y el tercer lugar a la sociedad en general ya que no están egresando estudiantes que tengan un nivel académico adecuado a los retos y necesidades que enfrentamos en la actualidad.

Camarena (Camarena Gallardo, 2010), afirma que el gran índice de reprobación en los cursos universitarios muestral el poco interés que la gran mayoría de estudiantes manifiestan por las matemáticas a causa de su “desconexión” con “su” realidad y “su” entorno, así como por la poca relación que existe con los otros cursos de las carreras que estudian. Esto lleva a un problema permanente que ayuda a propiciar la sensación de que el aprendizaje de las matemáticas es un fin en sí mismo, contradiciendo el planteamiento de verlas como un lenguaje dentro de la sociedad del conocimiento y como un instrumento para muchas áreas científicas y profesionales ligadas al desarrollo de competencias (García Retana, 2013).

Son varias las causas que incurren en las dificultades que se presentan en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, los cuales tienen relación con deficiencias en la práctica pedagógica o situaciones didácticas no apropiadas (Artigue, 2004), y también con la influencia del dominio afectivo tanto de docentes como de estudiantes (Rivas, 2005).

El área de ingeniería exige a los estudiantes el desarrollo de su capacidad de reflexionar los problemas que le presenta en su entorno, donde las matemáticas constituyen un instrumento para la búsqueda de soluciones o respuestas a los mismos, por lo que su enseñanza y aprendizaje deben ser tomados con importancia. Lo cual nos indica que el fracaso de la enseñanza-aprendizaje del cálculo por parte de los estudiantes puede estar relacionado con un manejo poco adecuado de las matemáticas debido a que no sabemos cómo podemos aprovechar los recursos que ofrece la geometría, el álgebra, las propiedades de los números, las ecuaciones y las funciones especialmente, así como tampoco los software que nos permiten visualizar estas funciones para lograr relacionarlas (García, 2013)

Es importante proponer estrategias encaminadas a fortalecer las habilidades para la comprensión en este tema ya que es una de las bases de la matemática que se imparte en los primeros años del nivel superior, está ampliamente relacionada con otras asignaturas profesionalizantes para los estudiantes de la ingeniería y licenciatura por mencionar algunas son: Trigonometría y Geometría Analítica; Algebra; Cálculo Diferencial; Cálculo Integral; Ecuaciones Diferenciales; Análisis Vectorial; Métodos Matemáticos II; Álgebra Lineal; Física I; Mecánica Clásica; Mecánica Cuántica; Electrostática; Electrodinámica; Radioastronomía; Astrofísica Relativista; Relatividad General.

Por otra parte, Camarena (2012) plantea que en el aprendizaje y enseñanza del área de la Ingeniería influyen muchos factores, dentro de los que sobresalen los que se refieren a las ciencias básicas. Estos forman las bases para las carreras de esta disciplina y el aprendizaje de las matemáticas es el componente más crucial, lo cual nos deja en una situación de vulnerabilidad en la formación de los futuros ingenieros, ya que un aprendizaje de las matemáticas en general, y del cálculo en particular, de manera indebida o incorrecta, puede complicar el desarrollo profesional de los futuros ingenieros.

Si el estudiante fortalece su aprendizaje sobre el tema de las Integrales Dobles, contará con herramientas sólidas para el entendimiento y manejo de temas más avanzados como lo es: Integrales Dobles en diferentes sistemas de coordenadas (cartesianas, cilíndricas, esféricas), se espera que el nivel académico de los estudiantes mejore y también aumente el número de estudiantes que logran finalizar su formación de carrera, ya que se sabe que las materias de cálculo en general son las que presentan índices altos de reprobación. También podemos esperar que la experiencia obtenida con software de matemáticas les permita desarrollarse mejor como profesionistas relacionando las ciencias exactas con problemas y soluciones de la vida real. La investigación de alternativas para el aprendizaje y la enseñanza del cálculo pretende aumentar el porcentaje de aprobación del curso.

Según los resultados obtenidos por Guerrero Vázquez, Hernández Sierra, González Álvarez, Jiménez Aranda y Pérez Salas (2021) en su investigación ellos infieren que para los estudiantes las materias que les son más complejas de aprender son las que cursan en el tronco común, las que se encuentran relacionadas con las ciencias básicas principalmente, en las cuales podemos ver que forman parte del Cálculo diferencial e integral, que son las que cuentan con mayor índice de reprobación y son las que más recursan los estudiantes, lo que los lleva en el peor de los escenarios a abandonar la carrera al no lograr aprobar estas materias, sea por desanimo o por haber terminado todas las oportunidades para aprobarlas; podemos notar que los motivos que los llevan a un mal desempeño en estas materias se debe a varias razones; el nulo autoconcepto que tienen de lo complejo que estas representan, al poco nivel cognitivo con que terminan el nivel medio superior, al no lograr adaptarse al nuevo método de estudio, así también como al escaso uso de las herramientas tecnológicas y el desconocimiento de las técnicas de estudio, además de no contar con habilidad para interrelacionarse con sus compañeros.

Así como también lo afirma Riego Gaona (2013), en su investigación los estudiantes de ingeniería, aceptan que su falta de conocimientos en matemáticas, su poco uso de estrategias de estudio y escaso tiempo de dedicación a sus estudios se vinculan directamente con la no aprobación de la materia de cálculo. Los resultados los llevaron a un tercer momento de investigación, en el que identificaron los factores académicos, que los maestros y los alumnos, relacionan con el problema de reprobación en la materia de Cálculo Diferencial específicamente, ya que ésta es la que presenta, los mayores porcentajes de no aprobación en las carreras de ingeniería.

De acuerdo con Rivera (2018) en el área de matemáticas el Cálculo y el Álgebra son las asignaturas que se consideran más complicadas y con mayor reprobación, establece que el abandono de la carrera profesional puede ser causada por la reprobación de estas asignaturas principalmente. Esta investigación también concuerda con Acevedo, Torres y Jiménez (2015) donde muestran evidencias de estudiantes de licenciatura que al presentar altos niveles de repetición en las asignaturas de las ciencias básicas, física y matemática, particularmente en cálculo, optaban por abandonar su carrera y buscar aquellas que no incluyan este tipo de asignaturas. Los casos de reprobación en los estudiantes, relacionada con el rezago académico y la deserción, se constituye en un impedimento para el logro de los objetivos de formación profesional de una institución educativa (Riego Gaona, 2013).

Actualmente en México se presentan problemas de reprobación y deserción escolar de forma significativa, estos problemas se reflejan en una baja eficiencia terminal en las instituciones de educación superior, también se percibe en la frustración de muchos jóvenes que truncan sus estudios profesionales con motivo del aprendizaje de las matemáticas (Rivera Castellón, 2018).

Para las carreras profesionales de ingenierías se observa que, en las asignaturas básicas del área de matemática, podemos encontrar el Cálculo Vectorial, el cual pretende desarrollar el análisis real multivariables de los vectores y funciones en dos o más dimensiones. Para esta asignatura se vuelve esencial que el estudiante domine conceptualmente y de forma práctica de las herramientas necesarias para la correcta solución de problemas aplicados a su especialidad, pueda establecer metodologías para abordar problemas y contenidos otras asignaturas como: Electrodinámica, Mecánica de los Fluidos, Aerodinámica, Mecánica Estadística, Termodinámica, Mecánica del Medio Continuo, entre otras (Costa y Arlego, 2011).

En las carreras que requieren un nivel avanzado de razonamiento cuantitativo es común que los estudiantes no aprueben su primer curso de matemáticas dentro del plan de estudios de la carrera, estos cursos se caracterizan por sus elevados índices de reprobación y deserción. Toda carrera profesional que posea un componente matemático en el currículo, ejerce un impacto de dificultad debido a que representan un grado de abstracción y complicación, esta percepción se convierte en un factor para la elección de la carrera profesional, comúnmente los aspirantes buscan aquellos programas de estudio que tengan pocos cursos del área matemática y sean de baja especialización del área (Castillo-Sánchez, et al., 2020).

El proyecto pretende mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Integrales Dobles usando un software graficador, en particular GeoGebra, que se ha observado que incide en un 21% el mejoramiento del rendimiento académico según lo reportado por (Villagrán-Cáceres, et al., 2018), que les permita a los estudiantes comprender y construir visualizaciones de superficies en R^2 o R^3. El tema se centrará en integrales dobles y evaluación de integrales dobles.

5.2 Justificación

La importancia para el ser humano de las matemáticas se debe en que gracias a ellas se ha logrado impulsar el desarrollo científico y el bienestar de la sociedad, ellas han dado origen a otras grandes ciencias como por ejemplo la computación la cual ha logrado automatizar la mayoría de muchos trabajos que antes realizaban los seres humanos. Sin embargo, esta área del conocimiento es la más compleja de aprender y también para enseñar; ya que es reto para el docente enseñarlas y sobre todo desarrollar estrategias que permitan al estudiante comprender los temas impartidos. La gran mayoría de los estudiantes tienen dificultades para aprender matemáticas, ellos piensan que es la asignatura más complicada de aprender y dominar y su interés por aprenderla es muy poco; ahí es cuando entra el docente y su función, aplicando adecuadas estrategias didácticas y utilizando diferentes tecnologías que permitan a los estudiantes logrear comprender y aplicar los conceptos matemáticos (Jiménez y Jiménez, 2017).

Cada área disciplinar se define y caracteriza por tener formas específicas para lograr construir el conocimiento. Si nos referimos al Cálculo, sus contenidos se encuentran en torno a las gráficas en dos y tres dimensiones, por lo que la interpretación, asimilación y comprensión de los conceptos estudiados están asociados con procesos de visualización. En la actualidad existen una diversidad numerosa de herramientas tecnológicas que hacen posible impulsar la enseñanza y comprensión de esta área del conocimiento (Rojas y Esteban, 2012).

5.3 Hipótesis

Mi hipótesis de investigación consiste en un juego de hipótesis identificadas como hipótesis nula H_o y alternativa H_a.

Ho: La implementación del software graficador GeoGebra representa una mejora en la enseñanza y rendimiento académico de los estudiantes para la comprensión de las integrales dobles y su evaluación.

Ha: La implementación del software graficador GeoGebra NO representa una mejora en la enseñanza y rendimiento académico de los estudiantes para la comprensión de las integrales dobles y su evaluación.

Se aplicará una prueba de hipótesis de una cola (derecha).

5.4 Objetivos de la investigación

Proponer una estrategia didáctica para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las integrales dobles y su solución usando un software interactivo GeoGebra en estudiantes de diferentes carreras de la Universidad Autónoma de Sinaloa.

5.4.1 Objetivos específicos

- Identificar y analizar algunas dificultades que inciden en la enseñanza-aprendizaje en los ejercicios de las integrales dobles y su evaluación.
- Proponer estrategias didácticas para la enseñanza-aprendizaje de las integrales dobles y su evaluación.
- Aplicar a los estudiantes en curso la estrategia didáctica diseñada para mejorar el proceso de enseñanza- aprendizaje de las integrales dobles y su evaluación.
- Evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje obtenido de forma tradicional con respecto a la propuesta didáctica utilizando el software GeoGebra.
- Valorar los resultados obtenidos en los estudiantes al realizar la aplicación de la estrategia didáctica.
- Interpretar los resultados obtenidos.

5.5 Metas y resultados esperados

- Identificar por lo menos 3 dificultades que presentan los estudiantes de la Universidad Autónoma de Sinaloa al resolver integrales dobles utilizando un instrumento de evaluación.
- Elaborar y describir una secuencia didáctica de enseñanza para la solución de integrales dobles y su evaluación implementando el uso del software GeoGebra.
- Implementar la propuesta didáctica en un grupo experimental el cual cursa la materia de Cálculo Vectorial.
- Comparar la propuesta con un grupo control.
- Analizar los resultados obtenidos y obtener conclusiones.

6. REVISIÓN DE LA LITERATURA

6.1 Marco teórico

El propósito principal de la presente investigación tiene como objetivo demostrar que el uso del software GeoGebra como herramienta de enseñanza, puede mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en la temática de las integrales dobles y su evaluación, aplicándolo en estudiantes de nivel superior en diferentes carreras de la Universidad Autónoma de Sinaloa.

Las matemáticas son consideradas fundamentales para el desarrollo y funcionamiento de la sociedad, así también como esenciales en la formación integral de las personas, lo cual constituye un elemento presente desde una edad temprana (Herrera, et al., 2012; Mora, 2003; Oliveros, 2011).

Los sujetos cognoscentes en el uso de la matemática pueden identificar aspectos relevantes, regularidades, relaciones y estructuras, de las situaciones de vida cotidiana o creadas en el pensamiento. A partir de ello puede organizar y estructurar la información, lo que le permitirá hacer inferencias, proposiciones y generalizar los comportamientos constantes, pudiendo realizar demostraciones acertadas (Guevara Chaves, 1990).

Cada ciclo escolar los docentes de educación superior nos enfrentamos al reto de desarrollar contenido didáctico y actividades de estudio que permitan transmitir eficientemente los conocimientos y mejorar el nivel de comprensión de las matemáticas en los estudiantes. A pesar de esto, las dificultades en su aprendizaje generan bajo rendimiento académico y son la razón de deserción escolar y exclusión social, ya que en la mayoría de los casos provocan la expulsión del sistema educativo de los estudiantes. (Rivas, 2005)

Es bien sabido que el proceso de enseñanza es complicado desde los primeros conceptos, por lo que a medida que avanza el desarrollo tecnológico y social, podemos adaptar los nuevos recursos como herramientas que permitan mejorar el proceso de enseñanza.

Se menciona que una perspectiva axiomatizada, algorítmica y rutinaria, es una causa principal que dificulta el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes. Esta afirmación ha llevado a considerar a las matemáticas como un área ajena a lo cotidiano, al entorno y a la aplicación, por el contrario, suele percibirse como un conjunto de procedimientos, formulas y conocimientos que existen por sí mismas sin relación alguna con los estudiantes y docentes (García Retana, 2013; Moreno Moreno, 2005).

Recientemente se ha desarrollado la invención de ambientes de aprendizaje de educación invertida en las matemáticas, apoyándose en software GeoGebra, centrándose en las necesidades de los estudiantes para motivar y desarrollar la interacción en el aprendizaje de las matemáticas (Weinhandl, et al., 2020). El uso de GeoGebra puede ilustrar bien los conceptos y procedimientos matemáticos a través de imágenes y gráficos, lo que ayuda considerablemente a los estudiantes a dominar y comprender conceptos y procedimientos relacionados con las funciones y los límites (Zulnaidi, et al., 2020). La fluidez de los alumnos en el uso de la tecnología es una oportunidad para que las instituciones educativas pongan en práctica las lecciones integradas de tecnología. Hasta el momento, GeoGebra se ha revelado como una herramienta crucial en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la educación (Wassie y Zergaw, 2019).

Como lo define Cantoral, (Cantoral y Montiel, 2003) es por medio de la visualización, el estudiante consigue representar, transformar, generar, transmitir y documentar información. Estos diferentes aspectos, nos llevan a mejorar nivel de enseñanza y de aprendizaje, y por lo tanto, es importante implementar herramientas que nos ofrezcan un desarrollo visual integral y que se adecuen de manera conjunta al contenido temático y a las necesidades propias del docente pero sobre todo del estudiante (Rojas y Esteban, 2012).

6.2 Estrategias pedagógicas

La práctica pedagógica, se entiende como el conjunto de actividades que nos permite a los docente, planificar, desarrollar y evaluar procesos de enseñanza mediante los cuales se trata de favorecer el aprendizaje de los estudiantes (Castillo, 2008; Jiménez Espinosa, et al., 2016; Wilson, 1996).

Para Castillo (Castillo, 2008), la práctica pedagógica incorpora a todos aquellos procesos en los cuales se desarrolla la enseñanza con la finalidad de mejorar el aprendizaje de los estudiantes. Está relacionada siempre y necesariamente a una teoría pedagógica y comprende todas las situaciones en donde se encuentren personas que desean capacitarse y aprender. Estas situaciones no serán accidentales o casuales. Enseñar y aprender, por tanto, son dos términos unidos por un solo propósito: lograr la construcción y apropiación de conocimiento y competencia por parte de los estudiantes que se encuentran en este propósito.

Hablar de estrategias pedagógicas innovadoras y significativas conllevan una reflexión sobre el proceso mismo de enseñanza-aprendizaje. Una estrategia pedagógica se define como los procesos que se desarrollan con el fin de mejorar el aprendizaje. Estos procesos no son accidentales, sino el resultado de una planeación lo que lleva al concepto de ambientes de aprendizaje. Este concepto que es relevante cuando el docente que los plantea hace evidente la intención de ayudar a mejorar a los estudiantes a aprender, intenta que las actividades propuestas lleven a una construcción de conocimientos que favorezca la capacidad de aprender de forma autónoma; que se adecuen a las necesidades y posibilidades de formación de los estudiantes; que además de proporcionar conocimientos, también logre que el estudiante se desarrolle de forma adecuada socialmente; con lo cual él estudiante logre orientar y reorientar su propio proceso de aprendizaje (Méndez Meza, 2012).

La importancia que han adquirido las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) en la actualidad y la marcada preferencia que los estudiantes muestran al momento de usar estas herramientas, las convierte en una opción factible para implementar estrategias didácticas de aprendizaje que no sean las que se usan tradicionalmente, estas serán atractivas y prácticas, lograran captar la atención de los estudiantes nativos digitales, mejoraran su motivación y ayudaran en su aprendizaje (Justo López, et al., 2021).

6.3 Tendencias didácticas

La Didáctica es una disciplina o tratado riguroso de estudio y fundamentación de la actividad de enseñanza en cuanto propicia el aprendizaje formativo de los estudiantes en los más diversos contextos (Medina Rivilla y Salvador Mata, 2009).

La didáctica se considera como la ciencia de la educación que estudia lo concerniente con la enseñanza, se encarga de diseñar condiciones mejores, así como un ambiente más agradable. Para conseguir un aprendizaje significativo y el desarrollo pleno de los estudiantes, hay que recorrer un camino largo que es complejo y muestra su evolución. La didáctica es una ciencia teórico-práctica: trata el qué, el cómo y cuándo enseñar (Moreno Olivos, 2011).

Para que la enseñanza superior pueda lograr sus metas uno de los componentes esenciales, es la Didáctica. Como lo menciona Moreno, la educación superior tiene su propia especialización, por tanto, requiere una didáctica distintiva que haga posible el aprendizaje de los estudiantes, que ya son adultos mayormente, los cuales tienen conocimientos y experiencias previas, así como también motivaciones y expectativas variadas respecto a su proyecto de vida personal y profesional (Moreno Olivos, 2011).

De acuerdo con Porlán Ariza (1989) en su trabajo de tesis propone cuatro tendencias didácticas con dimensiones epistemológicas diferentes, tres de ellas reflejan visiones parciales y reduccionistas de la dinámica del conocimiento en la escuela, denominas tradicional, técnica y espontaneísta. El cuarto de ellos está próximo a un punto de vista menos reduccionista y más complejo del conocimiento escolar, siendo denominado como complejo. Las cuatro tendencias didácticas se describen a continuación.

La ***tendencia didáctica tradicional*** dice que el conocimiento queda reducido a la literalidad verbal o escrita del mismo. Solo posee un único significado que es el que hay que enseñar (transmitir) y aprender (escuchar) y que, puede ser ajustado en una definición rigurosa que evite interpretaciones diferentes de la única correcta. Protegido de las deformaciones, de los factores subjetivos, los contenidos deben ser la reproducción literal de determinados conceptos disciplinares, utilizando la repetición tantas veces como sea necesario, cuando se detecten errores conceptuales en los alumnos. El papel de los estudiantes es esforzarse mentalmente por alcanzar el máximo nivel de aprendizaje conceptual de acuerdo con los objetivos del profesor. El estudiante no participa en la programación de los que se debe de conocer, solo el profesor está capacitado para realizar esta función.

El profesor explica un conjunto de demostraciones, descripciones, hechos, etc. El estudiante trata de escuchar y escribir lo más literalmente posible lo que dice el profesor, no para comprenderlo sino para memorizarlo para cuando llegue la evaluación. Ambos realizan estas tareas apoyándose en el contenido sistemático del libro de texto.

La ***tendencia didáctica técnica*** dice que el conocimiento no se reduce a su expresión literal y formal, sino al procedimiento técnico por el que lo obtenemos. No se garantiza una protección a los significados e interpretaciones erróneas, sino por apegarse a procedimientos rigurosos que garantizan la eficacia del conocimiento adquirido. Encuentra en la aplicación del método científico a la escuela la mejor garantía de que el alumno alcance el conocimiento verdadero. En este caso el profesor, no será tanto un transmisor de contenidos, sino una persona que programe y dirige las actividades de sus estudiantes que, a través de la observación, la elaboración de hipótesis y la experimentación sobre las mismas, redescubra el auténtico conocimiento.

La didáctica es concebida como una disciplina científica que investiga los procesos de enseñanza y formula instrucciones rigurosas para la práctica. Permite la obtención de teorías didácticas y metodológicas que garanticen un aprendizaje eficaz; por otro lado, disponer de un referente muy valioso para la actividad del estudiante: el método científico aplicado en el aula; por último, de unos instrumentos científicos que nos permiten medir con objetividad el conocimiento adquirido.

La ***tendencia didáctica espontaneísta*** responde a una simplificación, al abandonar la idea de salvaguardar el conocimiento de las deformaciones subjetivas y emocionales de las personas, por el contrario, prioriza salvaguardar que el conocimiento no sea solo mecánicamente incorporado o experimentalmente comprobado, sino que sea significativamente asimilado y responda al interés espontaneo de los estudiantes. Se pone énfasis en el estudiante y en su capacidad de "aprender por sí mismo", planteándose problemas al observar la realidad. En la práctica este planteamiento respondería a una situación en la que los estudiantes trabajando en equipos y con una fuerte dosis de iniciativa propia, aprenderían por sí mismos, con una cierta ayuda del profesor y siguiendo los diferentes procesos del método científico. El resultado de esta tendencia es descubrir los conceptos y desarrollar las destrezas y actitudes propias del trabajo científico.

La ***tendencia didáctica compleja*** en este caso se trata de no mezclar los criterios de objetividad y subjetividad, o de lo absoluto y lo relativo, lo racional y lo irracional. El conocimiento generado en la escuela es relativo en la medida que existen o pueden existir innumerables variantes conceptuales referidas a un mismo problema afines a la comunidad (profesores, investigadores, padres o artistas), resolviendo principalmente los problemas relevantes para la comunidad. No se considera el conocimiento previo del estudiante como algo incorrecto y a su vez el conocimiento reflejado en los contenidos como absolutamente cierto. La validez del conocimiento puede adaptarse al medio social determinado y a los problemas de este. El estudiante puede elegir los problemas que pretende resolver, de acuerdo con su interés y a las variantes ambientales cercanas. No existe al respecto una norma universal que nos permita una evaluación absoluta, cierta y verdadera del auténtico conocimiento, sea esta norma su adecuación a la lógica formal, o su obtención a partir de un procedimiento metodológico, riguroso y eficaz.

Podemos ampliar el concepto y obsérvalo de manera más practica según lo descrito por (Jiménez Espinosa, et al., 2016): La ***tendencia tradicional*** esta se identifica por la exposición de contenidos ya establecidos e inflexibles por parte del profesor, en estos el estudiante no tiene participación activa, ya que el profesor tiene como único material didáctico el uso de libros y tiene como fin que los estudiantes memoricen estos contenidos para después evaluarlos; de esta forma el único instrumento que utiliza para medir el aprendizaje es la evaluación sumativa y no formativa, es decir, se asigna un valor numérico el cual depende solo de la habilidad que tengan los estudiantes para memorizar la información y no se toman en cuenta los procesos que lleva a cabo el estudiante para llegar al resultado. En la ***tendencia tecnológica*** el profesor solo se centra en el seguimiento de planes que fueron establecidos de manera previa los cuales tienen objetivos fijos, esta tendencia considera al estudiante como el principal responsable de los resultados del aprendizaje, siempre y cuando que el ambiente elegido por el profesor sea adecuado; se otorga a la asignatura un carácter práctico además de una finalidad formativa, que permita su aplicación en otros entornos de la matemática. En la ***tendencia espontaneísta*** el profesor supone que el estudiante aprende de forma espontánea; esta tendencia se concentra en los intereses de los estudiantes, los conceptos no son tan importantes y se prioriza más los procedimientos y la dirección de la asignatura es más de carácter formativo que informativo, aquí se busca que el estudiante adquiera valores para enfrentar problemas de la vida cotidiana, la evaluación es formativa y permanente. Por último, la ***tendencia investigativa*** plantea un proceso que guiara al estudiante a adquirir el conocimiento por medio de la investigación, al profesor le importa no solo el aprendizaje de sus alumnos sino también busca incentivar actitudes positivas hacia la asignatura y el desarrollo de procedimientos. En la tendencia el aprendizaje se basa en la búsqueda y el cuestionamiento constantemente, en generar de la duda, esto es, en la pregunta y la búsqueda de la respuesta; la evaluación en esta tendencia es de carácter formativo.

Para el caso de estudio de este trabajo podemos considerar que se encuentra dentro de la tendencia didáctica técnica y también de la tendencia didáctica compleja. Debido a que se busca desarrollar el concepto matemático a través del proceso que guiará al estudiante en la construcción de las visualizaciones de las representaciones de las integrales y sus funciones. Permitiendo al estudiante formar sus propias representaciones semióticas de las integrales dobles y proponer las soluciones.

6.4 Estrategia didáctica para la enseñanza aprendizaje de la matemática

En forma general se percibe la enseñanza y el aprendizaje como un proceso entendido que relaciona un conjunto de eventos o tareas que se llevan a cabo para generar un cambio, y este puede ser interno o externo (Villamizar, et al., 2012).

Se define a los recursos didácticos son un conjunto de elementos que favorecen el proceso de enseñanza y aprendizaje, los cuales ayudan a que los estudiantes logren hacer propio un conocimiento determinado (Villacreses Veliz, et al., 2017).

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es un proceso que se realiza de forma intencionada de apropiación del conocimiento matemático, que empieza con la reflexión, comprensión, construcción y evaluación de los procesos didácticos que favorecen la obtención y el desarrollo de habilidades y actitudes para un adecuado desempeño matemático en la sociedad (Villamizar, et al., 2012).

La clasificación de las estrategias didácticas de acuerdo con Feo (2010) se pueden clasificar según el agente que las realiza, siendo las siguientes: **Estrategias de enseñanza;** es un encuentro pedagógico que se ejecuta estableciéndose un dialogo didáctico real pertinente a las necesidades de los estudiantes se lleva a cabo de manera presencial entre el docente y estudiante,. **Estrategias instruccionales;** este tipo de estrategia se fundamenta en material físico que se basa en un dialogo establecido previamente y simulado, se acompaña con asesorías que no son obligatorias donde participa el docente y el estudiante, y se apoyan solo de forma auxiliar en un recurso instruccional que sea tecnológico. **Estrategias de aprendizaje;** son todos aquellos procedimientos que lleva a cabo el estudiante de forma consciente e intencionada para aprender, es decir, utiliza técnicas de estudios y reconoce el uso de habilidades cognitivas para aumentar sus capacidades ante una tarea escolar, estos procedimientos son únicos y exclusivos del estudiante. **Estrategias de evaluación;** son todos los procedimientos que fueron acordados previamente y generados con la finalidad de reflexionar en función a la valoración y descripción de los logros alcanzados por parte de los estudiantes y docentes de las metas de aprendizaje y enseñanza que fueron establecidas.

De acuerdo con la teoría de los Registros de Representación Semiótica (TRRS) propuesta por (Duval, 2006) se incluye el análisis de los materiales utilizados en las tareas de la matemática, también nos muestra cómo se transforman estas representaciones y el individuo como aprovecha estas representaciones. Principalmente las representaciones semióticas se consideran la clave de la comprensión, construcción y socialización de la matemática, a través de la disponibilidad y uso de las representaciones semióticas. De igual forma, el dominio de las representaciones puede ser previsto como no espontaneo, sino que se debe producir y promover la utilización de estos materiales dentro de la enseñanza de la matemática (Godino, et al., 2016).

Por lo general los conceptos de Cálculo, funciones, limites derivadas e integrales (entre otros), son enseñados por los profesores en los cursos de Cálculo solo de manera algebraica lo que lleva a que los alumnos también los aborden de esta forma. Es complejo explicar los conceptos mencionados sin que los estudiantes desarrollen habilidades visuales relacionadas a la construcción de los tópicos citados (Portillo-Lara, et al., 2019).

Sabemos que el Cálculo se define ya que nos permite estudiar el cambio, la dependencia y la variación. Por esta razón, las representaciones que nos facilita GeoGebra toman un gran potencial, ya que dejan de ser estáticas para pasar a ser completamente dinámicas, lo que nos lleva a que los puntos pueden moverse a lo largo de las gráficas de las funciones, los parámetros pueden modificarse usando deslizadores y los textos se adaptan automáticamente a los cambios (Hohenwarter, et al., 2008). Así de acuerdo con diferentes autores, un entorno con estas características nos permite realizar experimentos, conectar representaciones gráficas y simbólicas, y discutir acerca de conjeturas y conceptos básicos (Del Río, 2020).

6.4.1 Actividades de enseñanza

En cualquiera de las asignaturas incluyendo la matemática, el objetivo principal de las actividades de enseñanza, es exactamente la obtención de los logros por parte del estudiante; por esta razón, tanto el docente, como el estudiante, el contexto y el contenido, son elementos primordiales en el proceso. En consecuencia, el rol que desempeña del docente es decisivo en el proceso; así como la actitud y la actividad del docente en el aula, ya que el ambiente de trabajo favorecerá o no el aprendizaje (Méndez Meza, 2012). Podemos diferenciar las actividades de enseñanza de las de aprendizaje de acuerdo con el agente que realiza la actividad, siendo el aprendizaje meramente del estudiante y la de enseñanza de la relación entre el docente y el estudiante.

6.4.2 Representación semiótica

Para Duval (2006), la prioridad de los aspectos semióticos es primordial en la comprensión de las matemáticas, debido a la naturaleza particular de los objetos matemáticos, los cuales representan una funcionalidad (matemática), expresada como un conjunto de signos que permite la comprensión del objeto. Se establece que el acercamiento a los objetos matemáticos se produce exclusivamente por medio del empleo de sistemas de representación.

Duval (2006) hace énfasis en la importancia del trabajo del estudiante con diferentes registros de representación (que pueden ser, verbal, gráfico y algebraico). Lo cual implica la habilidad de representar y reconocer a un mismo objeto matemático en diferentes contextos semióticos, poder realizar transformaciones entre los mismos y elegir, para cada situación problemática que deba resolver, el que sea más conveniente para la situación: "la actividad matemática requiere una coordinación interna, que ha de ser construida, entre los diversos sistemas de representación que pueden ser elegidos y usados" (p. 145).

La teoría de los registros de representación semiótica formulada por Raymond Duval (2006) y retomada por Del Rio (2016) se sostiene en que, los objetos matemáticos no son accesibles físicamente, a través de evidencias sensoriales directas o mediante el uso de instrumentos, a diferencia de los objetos de estudio de otras disciplinas científicas. La única forma de tener acceso y trabajar con ellos es por medio de signos y representaciones semióticas (Duval, 2006, p. 157).

Diferentes herramientas como lo es GeoGebra nos permiten introducir nuevos tipos de representaciones, a las que (Lupiáñez y Moreno-Armella, 2001) denominan representaciones dinámicas o ejecutables, las cuales, habilitan nuevas formas de acceder a los objetos matemáticos. De aquí se deduce la importancia para que los recursos educativos diseñados exploten el potencial de estas nuevas representaciones, y que no solo se limiten a trabajar con las formas estáticas, que son posibles con el uso de papel y lápiz (Del Río, 2020).

Muchos investigadores han destinado su trabajo a precisar el concepto de representación y a analizar el papel que estas desempeñan en el razonamiento de los estudiantes (Duval, 1999; Lupiáñez y Moreno-Armella, 2001). Por representaciones vamos a entender, en el entorno de las matemáticas, notaciones simbólicas o gráficas, o bien verbales, por medio las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina, así como sus características y propiedades más importantes. Estas representaciones se clasifican en registros de representación (Duval, 1999), según sus características.

Implementar la visualización como una herramienta de enseñanza del Cálculo, brinda grandes posibilidades. A los docentes, les permite transmitir sus conocimientos desde diferentes perspectivas y a los estudiantes, les da la oportunidad de complementar, abordar y profundizar los conceptos a través de distintos puntos de vistas (analítico, visual, evaluativo, aplicativo, entre otras) es por esto que, uno de los aspectos esenciales a desarrollar en los estudiantes de Cálculo es la visualización (Rojas y Esteban, 2012).

6.4.3 Aplicación de la tecnología

La educación debe estar constantemente innovando para enseñar al ser humano a desenvolverse en la vida cotidiana, innovar la educación es incluir en sus técnicas de enseñanza la implementación de la tecnología para el aprendizaje de los diversos conceptos y aplicaciones, es sumamente importante aplicar estas herramientas que impulsan a desarrollar los conocimientos y generar nuevo, en consecuencia el área del conocimiento de la matemática se desarrollara en beneficio de los estudiantes y los docentes que exploran la comprensión de las matemáticas de forma aplicada (Jiménez y Jiménez, 2017).

Es importante tener en cuenta la premisa de que la tecnología, por sí misma, no asegura la formación de mejores estudiantes, es decir, ésta es un medio que ayuda a optimizar el proceso de enseñanza y de aprendizaje, mas no es un fin. El uso de manera consciente de la tecnología en cualquier proceso educativo no conduce a otra cosa más, que al enriquecimiento y construcción del conocimiento, siempre y cuando este proceso esté acompañado por el docente y su estudiante a una concepción pedagógica (Rojas y Esteban, 2012).

En la actualidad diversas problemáticas tienden a solucionarse gracias al rápido y continuo avance de la tecnología, como es el caso de la educación en matemática, y esto implica innovación y creatividad en el diseño y construcción de herramientas por parte del docente para el proceso de enseñanza aprendizaje con la intensión de cubrir las necesidades e intereses de los estudiantes (Ramirez Inca y Nesterova, 2021).

En la actualidad la tecnología debe utilizarse como herramienta del recurso didáctico como refiere Romero Ariza y Quesada (2014), “la aplicación de las TIC a la enseñanza de las ciencias llega al estudiante de una forma más fácil adquiriendo conocimiento. El valor formativo de dichas aplicaciones se discute desde los actuales conocimientos acerca de cómo los individuos aprenden, mostrando el potencial de estos recursos para superar los obstáculos específicos asociados al aprendizaje efectivo” (p. 101).

Una de las problemáticas más grandes que enfrentan los sistemas educativos latinoamericanos, es el bajo rendimiento académico de los estudiantes, definido éste, como el nivel de aprendizaje alcanzado por los estudiantes. Esta situación, es consecuencia de la pobreza cultural, programas ambiguos, objetivos superficiales y de los métodos y estrategias tradicionales que aplican algunos docentes (Villacreses Veliz, et al., 2017).

La implementación de las herramientas tecnológicas en el aula de clase ha generado cambios sustanciales en la forma como aprenden los estudiantes las matemáticas actualmente. Los distintos ambientes computacionales permiten que los estudiantes conjeturen, identifiquen, examinen y comuniquen ideas y conceptos matemáticos (Rojas-Celis y Cely-Rojas, 2020).

De acuerdo con Molero (2009) “La tecnología puede llegar a ser una poderosa herramienta que le permite al estudiante formular o responder sus propias preguntas, lo cual constituye un importante aspecto en el aprendizaje de las matemáticas tal y como lo describen” (p. 125) con las siguientes características:

- Proporciona el trabajo de forma diversa con los estudiantes, lo que crea un ambiente agradable en el que permite a el estudiante aprenda a su propio ritmo.

- Promueve el trabajo en equipo, ya que ayuda a los estudiantes a expresar sus ideas y enriquecer su comunicación por medio de la discusión alrededor de una conjetura matemática.
- Impulsa la capacidad de representar numérica y gráficamente la información obtenida por el estudiante, alcanzando como resultado la visualización de modelos matemáticos, así como facilitando su estudio y la elaboración de predicciones alrededor de estos.
- Familiariza la herramienta de aprendizaje, con el entono cotidiano del uso de la tecnología en su quehacer diario.

De esta forma, se debe reconocer que incorporar la tecnología en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es una herramienta importante que permite hacer llegar la información que se necesita a los estudiantes (Rojas-Celis y Cely-Rojas, 2020). Así podemos darnos cuenta que las TIC pueden ser grandes aliadas en el proceso de construcción del conocimiento de los estudiantes, así como mejorar sus resultados académicos si se planea su intervención en un diseño instruccional (Justo López, et al., 2021).

El contenido curricular del Cálculo gira alrededor de gráficos en dos y tres dimensiones, por esta razón, utilizar herramientas tecnológicas que ayuden a tener una buena práctica visual en el proceso de enseñanza y de aprendizaje, garantizara en parte el entendimiento de los conceptos propios de este curso. De la misma forma, la asociación de expresiones teóricas, analíticas y visuales, aumenta considerablemente la comprensión de los conceptos y brinda la oportunidad de indagar y profundizar más a fondo las temáticas relacionadas (Rojas y Esteban, 2012).

GeoGebra es un software matemático dinámico para todos los niveles educativos que agrupa geometría, álgebra, hojas de cálculo, gráficos, estadísticas y cálculo en un solo motor. Además, GeoGebra ofrece una plataforma en línea con más de un millón de recursos gratuitos para el aula creados por nuestra comunidad multilingüe. Estos recursos se pueden compartir fácilmente a través de nuestra plataforma de colaboración GeoGebra Classroom donde se puede monitorear el progreso de los estudiantes en tiempo real (GeoGebra, 2022).

6.4.4 Uso de las TIC en las Matemáticas

Las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) continuamente se actualizan a nuevas formas e inmediatamente se relacionan con la educación, en el contexto de la educación se espera también se actualice en consecuencia del avance tecnológico, de lo contrario; se está hablando de alumnos mecanizados y memorísticos, incapaces para pensar crítica y reflexivamente. La aplicación de las TIC en la enseñanza en el campo de las matemáticas impulsa el cumplimiento de competencias cuyo objetivo es la comprensión de los conceptos matemáticos útiles para la solución de problemas cotidianos (Jiménez y Jiménez, 2017).

Uno de los pilares de la Sociedad del Conocimiento es la relación de las matemáticas como generador del desarrollo de nueva tecnología, por lo que toma gran importancia la enseñanza y aprendizaje de la matemática en la educación de nivel superior. El lenguaje universal para la alfabetización digital sin lugar a dudas son las matemáticas, por ello la necesidad de dominar y aplicar un mínimo esencial de matemáticas por parte de la sociedad (García, 2013).

Castillo (2008) comenta que, es clara la necesidad de utilizar la tecnología en el aula, pero debido a que su implementación aún no se logra, se deben publicar y promover las ventajas que se obtienen al introducirlo en el desarrollo del proceso de enseñanza- aprendizaje.

Las TIC pueden considerarse que son un beneficio mutuo para el docente y el estudiante, debido a que se desarrolla el pensamiento matemáticos por parte del estudiante (creatividad, imaginación y pensamiento lógico) y por parte del docente desarrolla las destrezas y habilidades en el uso de las tecnologías que le permite mejorar su proceso de enseñanza-aprendizaje (Jiménez y Jiménez, 2017), se puede entender o diferenciar que el aprendizaje matemático es un proceso de comprender y construir el nuevo conocimiento nacido del conocimiento y la experiencia previa del estudiante.

La aplicación de las TIC en la forma adecuada dentro de la enseñanza de las matemáticas y particularmente en el Cálculo, genera un cambio en las formas en cómo se expresan los contenidos del curso. El uso del internet permite el acceso gratuito a herramientas como GeoGebra la cual nos ha permitido realizar gráficos en dos y tres dimensiones; así como representar un concepto de forma interactiva. Si este tipo de herramientas tecnológicas se integran al aula de Calculo, además de su beneficio, promueven la participación del alumnado y plantea retos distintos a los tradicionales, se crean así los ambientes para un flujo y retroalimentación del conocimiento (Rojas y Esteban, 2012).

De acuerdo con Tamam y Dasari (2021), un programa informático que se puede utilizar en el aprendizaje de las matemáticas es el software GeoGebra. Dicho software es un programa informático para apoyar la enseñanza y el aprendizaje de materias matemáticas, especialmente en geometría, calculo, álgebra y estadística. Las diversas funciones proporcionadas por el software GeoGebra esperan que pueda ser un gran medio para ayudar a sus usuarios a visualizar objetos geométricos abstractos de forma rápida, precisa y eficiente.

GeoGebra constantemente se encuentra en una evolución conceptual y tecnológica gracias a su filosofía de código libre y abierto. En un primer momento cuando apareció el software fue utilizado casi exclusivamente por profesores para crear los recursos de las clases. Los recursos generados por estos profesores se compartieron de forma libre y abierta por la red de usuario de GeoGebra, los cuales usaron y adaptaron estos recursos libremente. Esta oportunidad de crear y compartir el material entre los usuarios de forma libre dio la oportunidad que se desarrollara y consolidara una comunidad GeoGebra que crece muy rápidamente y se consolida en el ambiente educativo (Rubio-Pizzorno, 2020).

6.4.5 Formación docente en las TIC y la Matemática

Sobre las competencias digitales con las que debe contar un docente, existen numerosos estudios al respecto (Cabero, et al., 1998; Majó, 2001; Tejada Fernández, 1999), de los cuales se pueden obtener las siguientes competencias digitales:

- Contar con una actitud positiva hacia las TIC, instrumento de nuestra cultura que conviene saber usar y aplicar en bastantes actividades ya sean domésticas o laborales.
- Saber los usos de las TIC en el ámbito educativo.
- Comprender el uso de las TIC en el campo de su área de conocimiento.
- Utilizar con destrezas las TIC en sus actividades: editor de textos, software interactivo relacionado con su área, correo electrónico y navegación por internet, por ejemplo.
- Adquirir al hábito de planificar el currículo integrando las TIC (como instrumental en las actividades propias de su área de conocimiento, como medio didáctico y como mediador para el desarrollo cognitivo).
- Plantear actividades formativas que consideren el uso de TIC a los estudiantes.
- Evaluar el uso de las TIC permanentemente.

6.4.6 Competencias en el uso de las TIC en la Matemática

Semenov, Pereversev y Bulin-Socolova (2005) establecen las competencias con las que debe contar el docente que usa las TIC para potenciar el proceso de enseñanza y facilitar el aprendizaje de las ciencias en general, y de las matemáticas en particular. Estas competencias principales y esenciales para el uso efectivo de las TIC como herramientas de aprendizaje no omiten a la pedagogía, la colaboración y trabajo en red, implicaciones sociales e implicación técnica:

Competencias pedagógicas: Al implementar las competencias pedagógicas que nos permiten introducir la tecnología obtiene importancia fundamental el contexto local y el enfoque pedagógico de cada docente, que está vinculado al de su disciplina. A medida que se incremente el utilizar las TIC como forma de apoyar el aprendizaje y apoyar de forma favorable la enseñanza, el docente podrá:

- Mostrar una mejor comprensión de las oportunidades e implicaciones del uso de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje dentro del contexto del plan de estudios.
- Planificar, implementar y dirigir actividades de aprendizaje y de enseñanza en un entorno de aprendizaje más flexible y abierto, donde debe evaluar cada proceso.

Colaboración y trabajo en red: Las TIC nos brindan potentes herramientas que nos sirven como apoyo en la comunicación tanto dentro de los grupos de aprendizaje como fuera del aula de clases. De esta forma el rol del docente se transforma al de ser un facilitador de la colaboración y el trabajo en red entre poblaciones que pueden ser locales y mundiales. Esta expansión de las comunidades de aprendizaje más allá de los límites del salón de clase necesita que se respete la diversidad, que se incluya la educación intercultural y se tenga acceso igualitario a los recursos electrónicos de aprendizaje.

A lo largo de este proceso, el docente:

- Mostrará una aptitud crítica sobre los beneficios del aprendizaje en red y en colaboración dentro y entre las comunidades y los países.
- Participará de manera efectiva en entornos de aprendizajes flexibles y abiertos, tanto en el rol de docente como en el de estudiante.
- Creará o desarrollará redes de aprendizaje que darán beneficios tanto a la profesión docente como a la sociedad.
- Ampliará el acceso a la educación y brindará oportunidades de aprendizaje a todos y cada uno de los miembros de la comunidad.

Implicación social: El acceder a la información tecnológica, es una responsabilidad compartida por los miembros de la comunidad.

El docente deberá:

- Comprender y aplicar la forma legal y moral del uso, tales como el respeto a los derechos de autor y propiedad intelectual.
- Reflexionar y discutir el impacto social, en el ámbito local y mundial.
- Planificar el uso de las TIC, incluyendo el asiento, la luz, el sonido.

Implicación técnica: La integración de las TIC al plan de estudios implican la capacidad, disponibilidad, infraestructura, y apoyo en el ámbito académico. El docente deberá:

- Usar y seleccionar, el recurso tecnológico adecuado efectivo para su desarrollo profesional.
- Actualizar sus conocimientos y habilidades para aceptar nuevos proyectos tecnológicos.

De esta forma podemos afirmar que la practica pedagógica, debe estar sincronizada en sus contenidos académicos a desarrollar en las aulas, y también en los contenidos curriculares que han estado cambiando en todos los niveles y áreas del saber. Lo cual aconseja se realice un revisión y actualización en la base de la matemática educativa (Castillo, 2008).

Para los docentes las TIC representaran el acceso a nuevos recursos disponibles en la red, desde la perspectiva de la matemática encontraran material y herramientas que favorecen la enseñanza y el aprendizaje que utilizan audio, video, gráficos y multimedia variada, y se puede garantizar el aprendizaje si las estrategias están diseñadas apropiadamente (Castillo, 2008).

6.4.7 Ventajas del uso de las tecnologías

Para desarrollar este nuevo ambiente de enseñanza y aprendizaje, las TIC nos brindan múltiples ventajas y oportunidades (Semenov, 2005) para:

- Favorecer el aprendizaje de estudiantes que cuentan con estilos de aprendizaje y capacidades diferentes, incluyendo los que cuentan con alguna dificultad de aprendizaje, tengan desventajas sociales, discapacidades físicas o mentales, los muy talentosos y los que viven en áreas alejadas;
- Tornar el aprendizaje más efectivo, utilizando más sentidos dentro de un contexto multimedia y más conexiones dentro de un contexto hipermedia; y
- Brindar un contexto internacional más amplio para abordar los problemas y las necesidades locales.

Haciendo una síntesis las TIC construyen entornos interactivos y multi-sensoriales que potencializan la enseñanza-aprendizaje a los estudiantes y a los docentes, las TIC deberían:

- Acceder a multimedia, una combinación de videos, textos y gráficos, creados por especialistas y entregados de forma electrónica;
- Enseñar a todo un grupo con la ayuda de la virtualización;
- Permitir elegir el estilo de aprendizaje individual;
- Acceder a planes de estudio individualizados;
- Utilizar pruebas de diagnóstico y progreso individualizadas;
- Cambiar de área de aprendizaje a otra con total independencia;
- Presentar en formato gran pantalla de video (proyector);
- Acceder a repositorios de recursos, incluyendo redes inalámbricas;
- Continuidad del acceso a los recursos en red fuera de la institución.

En el aprendizaje de las matemáticas la formulación de reflexiones críticas, preguntas de entendimiento, y planteamiento de problemas constituyen un aspecto critico en la representación del conocimiento y las soluciones. Por lo cual el uso de herramientas tecnológicas que les permitan a los docentes y estudiantes crear esos escenarios, practicar de las posibles soluciones y poder representarla de la manera que mejor aporte a su aprendizajes serán las mayores ventajas en el desarrollo del potencial matemático (Jiménez y Jiménez, 2017; Ortiz Hermosillo y Rosario Lopez, 2020).

7. METODOLOGÍA

La elección del diseño de investigación es de tipo experimental, cuyo propósito es someter una hipótesis a prueba, empleando cuasiexperimentos en grupos de estudiantes intactos (Hernández Sampieri, et al., 2010).

La presente investigación estuvo dirigida a estudiantes en los primeros años de educación superior en la Universidad Autónoma de Sinaloa, de la Facultad de Ciencias de la Tierra y el Espacio, el propósito fue proponer una estrategia didáctica para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las integrales dobles y su solución usando el software interactivo GeoGebra en la materia de Cálculo Vectorial, con un modelo de intervención en el mejoramiento de la representación del objeto matemático.

Dicha investigación forma parte del estudio explicativo con una hipótesis de diferencia de grupos atribuyendo causalidad y un diseño experimental de tipo cuasiexperimental en dos grupos diferentes. Se identificaron las dificultades de aprendizaje, se describió una estrategia de enseñanza (anexo 1.1) y se aplicó esta estrategia de enseñanza en un grupo experimental que se comparó con una enseñanza tradicional en un grupo control ambos grupos formados previamente por la Facultad de Ciencias de la Tierra y el Espacio. En los diseños cuasiexperimental, los sujetos no se asignan al azar a los grupos ni se emparejan, sino que dichos grupos ya están conformados antes del experimento: son grupos intactos esto está sustentado por (Hernández Sampieri, et al., 2010).

Se diseñaron nueve sesiones de 90 minutos cada una, aplicadas cada una durante tres semanas, las cuales se implementaron en el grupo control y grupo experimental. El tema abordado en ambos grupos se refiere a integrales dobles y su evaluación, con la diferencia que en el grupo experimental se utilizó adicionalmente el software interactivo GeoGebra.

7.1 Enfoque metodológico

Los enfoques de la investigación se dividen en tres: cuantitativo, mixto y cualitativo. La investigación presente utilizo un enfoque metodológico de investigación cuantitativo ya que usamos la recolección de datos para probar hipótesis, con base en la medición numérica y el análisis estadístico (Hernández Sampieri, et al., 2010).

7.2 Análisis Estadístico

En el experimento realizado tenemos muestras pequeñas de dos poblaciones independientes, el tamaño de las muestras para la población uno es 9 estudiantes y para la población dos es de 12 estudiantes, aun cuando los tamaños de muestra son pequeños, podemos considerar que la distribución que rige el comportamiento de los datos es la normal (suposición de simetría alrededor de la media).

Para formar una estadística con una distribución de muestreo que pueda deducirse en forma teórica es necesario hacer algunas suposiciones. Vamos a suponer que la variabilidad de la medición en las dos poblaciones normales son iguales y puede ser medida por una varianza común σ^2. Esto es ambas distribuciones tienen la misma forma, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, considerando que σ_1^2 y σ_2^2 corresponden a las varianzas de cada una de las poblaciones respectivamente.

Si usamos la estimación muestral apropiada s^2 para la varianza poblacional σ^2, entonces el estadístico de prueba para probar la igualdad de las medias poblacionales tiene una *distribución t de Student* (Mendenhall, et al., 2010), es decir,

$$t = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

siendo n_1 y n_2 las muestras de las poblaciones, μ_1 y μ_2 las medias de las poblaciones, σ_1^2 y σ_2^2 las varianzas de las poblaciones, y los estadísticos muestrales $\overline{x_1}$ y $\overline{x_2}$ las medias y s_1^2 y s_2^2 las varianzas.

Para encontrar la estimación de la varianza s^2 y el numero apropiado de los grados de libertad para el estadístico *t* se usan las fórmulas:

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

con s_1 y s_2 las desviaciones estándar muestrales de la población uno y dos respectivamente.

Como s_1^2 tiene $(n_1 - 1)$ grados de libertad y s_2^2 tiene $(n_2 - 1)$ grados de libertad, el numero total de grados de libertad es la suma:

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n_1 + n_2 - 2$$

mostrada en el denominador de la fórmula para s^2.

Se usará una prueba de hipótesis respecto a la diferencia entre dos medias para muestras aleatorias independientes.

También podremos calcular el intervalo de confianza $(1 - \alpha)100\%$ de muestra pequeña para $(\mu_1 - \mu_2)$ con base en muestras aleatorias independientes

$$(\overline{x_1} - \overline{x_2}) \mp t_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

donde s^2 es la estimación agrupada de σ^2.

Para la evaluación del experimento se tienen dos grupos de estudiantes que representaran dos muestras pequeñas independientes, un grupo control y un grupo experimental, al aplicarse en estos grupos un pre-test y un post-test las medias se consideran por pregunta realizada. Realizando las pruebas de hipótesis usando la distribución *t* de Student evaluando que se cumplan las condiciones de normalidad y varianzas iguales.

8. ANÁLISIS DE RESULTADOS

8.1 Resultados de los pre-test y post-test para el grupo experimental

Se presentarán los resultados obtenidos para el grupo experimental el pre-test y post-test, para cada pregunta se realizó la descripción de los resultados, los porcentajes y el grafico comparativo de los resultados.

8.1.1 Resultados grupales pregunta 1

La pregunta 1 podemos observarla en la **Figura 1** el contenido del ejercicio a resolver pretende evaluar el conocimiento y habilidad del tema de cilindros, demostrando su comprensión de una ecuación a su representación gráfica. Los resultados del pre-test se muestran en la **Tabla 1**, se observó un promedio de 72% de respuestas correctas en el grupo. Los resultados del post-test se muestran en la **Tabla 2**, se observó un promedio de 96% de respuestas correctas en el grupo. En la **Figura 2** se muestra la comparación del pre-test con el post-test con una mejora del 24%.

Relacione la gráfica con el cilindro según corresponda

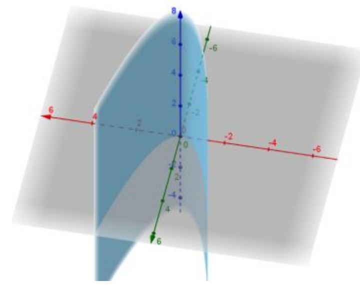
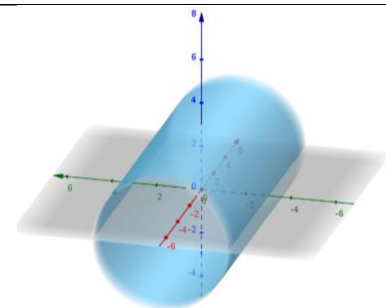
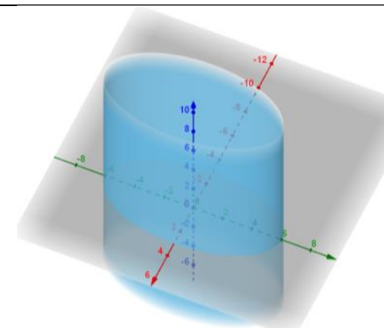
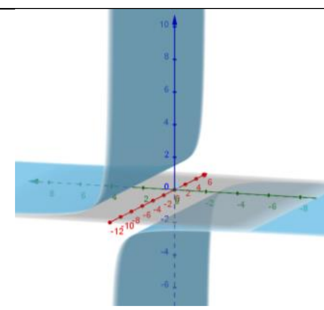
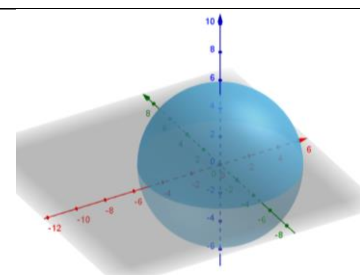
$x^2 + y^2 + z^2 = 25$	( )	a)	
$yz = 1$	( )	b)	
$y^2 + z^2 = 9$	( )	c)	
$4x^2 + y^2 = 36$	( )	d)	
$y = x^2$	( )	e)	

Figura 1.- Pregunta 1 del examen aplicado previo y posterior a la secuencia didáctica.

Tabla 1.- Resultados pregunta 1 pre-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	3/5				
02_SG	3/5				si
03_JG	0/5				
04_JH	5/5				si
05_JM	1/5				
06_CM	5/5				si
07_JO	5/5				
08_PP	5/5				
09_LS	5/5				

Tabla 2.- Resultados pregunta 1 post-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	5/5				si
02_SG	5/5				si
03_JG	5/5				si
04_JH	5/5				si
05_JM	5/5				si
06_CM	5/5				si
07_JO	5/5				si
08_PP	3/5				si
09_LS	5/5				si

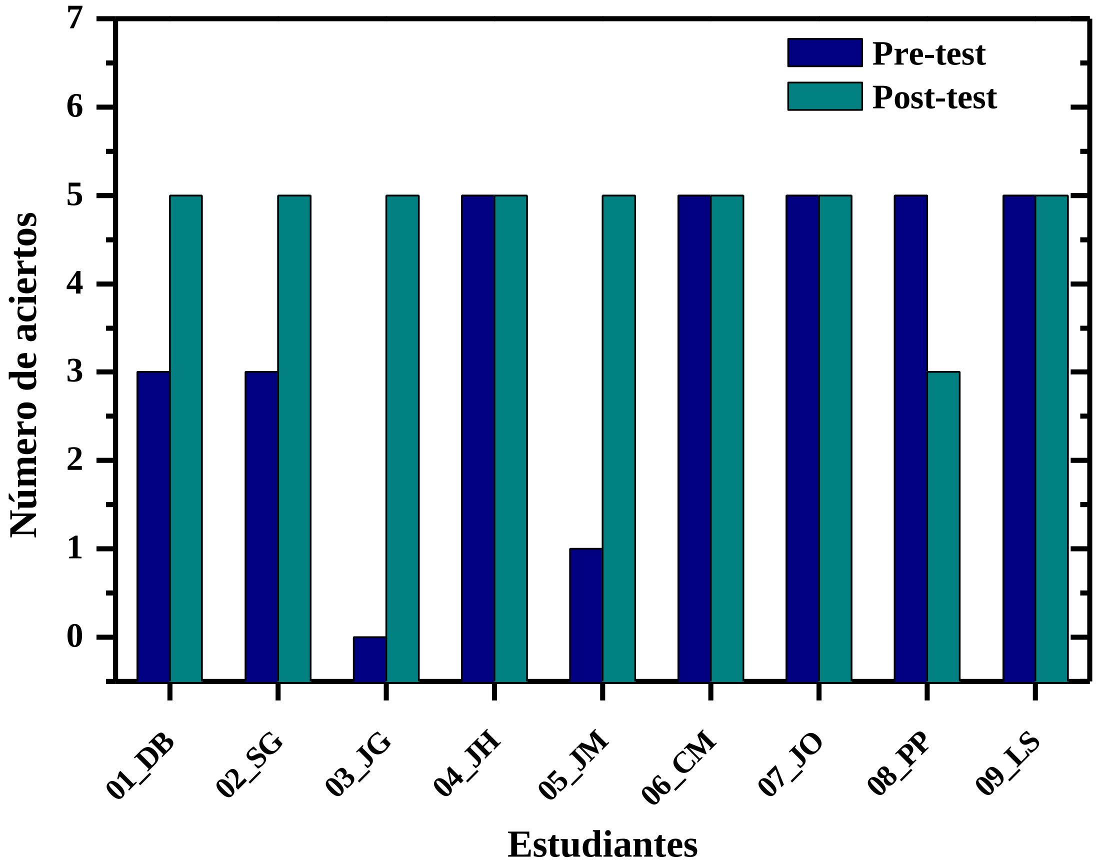


Figura 2.- Comparativo de las respuestas a la pregunta 1 del pre-test y post-test para cada estudiante del grupo experimental en el que se aplicó la secuencia didáctica para la enseñanza de las integrales dobles.

8.1.2 Resultados grupales pregunta 2

La pregunta 2 podemos observarla en la **Figura 3** el contenido del ejercicio a resolver pretende evaluar el conocimiento y habilidad del tema de integrales dobles, demostrando su comprensión para evaluar una integral de este tipo. Los resultados del pre-test se muestran en la **Tabla 3**, se observó un promedio de 44% de respuestas correctas en el grupo. Los resultados del post-test se muestran en **Tabla 4**, se observó un promedio de 94% de respuestas correctas en el grupo. En la **Figura 24** se muestra la comparación del pre-test con el post-test con una mejora del 50%.

Evalúe la doble integral

$$\int_0^{\pi/4}\int_0^2 x\cos(xy)\,dy\,dx$$

A. $\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}$

B. $\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2}$

Figura 3.- Pregunta 2 del examen aplicado previo y posterior a la secuencia didáctica.

Tabla 3 .- Resultados pregunta 2 pre-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	0		si		
02_SG	0		si		
03_JG	1				si
04_JH	0			si	
05_JM	1	si			
06_CM	0				si
07_JO	1				si
08_PP	0		si		
09_LS	1	si			

Tabla 4.- Resultados pregunta 2 post-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	1	si			
02_SG	1	si			
03_JG	0.5		si		
04_JH	1	si			
05_JM	1	si			
06_CM	1	si			
07_JO	1	si			
08_PP	1	si			
09_LS	1	si			

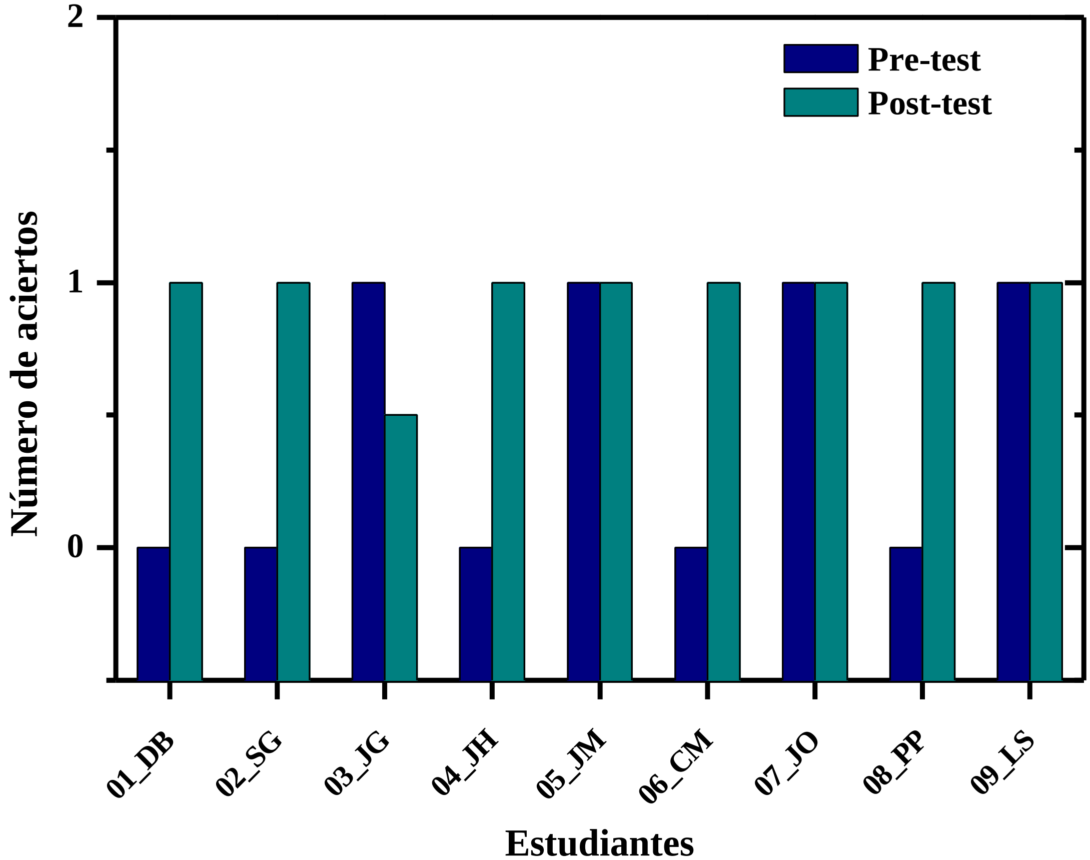


Figura 4.- Comparativo de las respuestas a la pregunta 2 del pre-test y post-test para cada estudiante del grupo experimental en el que se aplicó la secuencia didáctica para la enseñanza de las integrales dobles.

8.1.3 Resultados grupales pregunta 3

La pregunta 3 podemos observarla en la **Figura 5** el reactivo propuesto evaluar la comprensión de la integral doble como solución para encontrar el área de una región, se propone una región delimitada por ecuaciones para evaluar la comprensión de los límites de integración, y se propone un diferencial de área para observar el criterio del estudiante elegir el orden de integración correcto. Los resultados del pre-test se muestran en la **Tabla 5**, podemos observar un promedio de 44% respuestas correctas en el grupo. Los resultados del post-test se muestran en la **Tabla 6**, podemos observar un promedio de 78% respuestas correctas en el grupo. En la **Figura 6** se muestra la comparación del pre-test con el post-test con una mejora del 34%.

Evalúe la doble integral $\iint_R x^2 dA$ sobre la región R delimitada por las gráficas de las ecuaciones:

$$y = 4 - x,\ x = 0,\ y = 0, \text{ y } x = 2$$

A. 6
B. 20
C. $\frac{20}{3}$
D. $\frac{44}{3}$

Figura 5.- Pregunta 3 del examen aplicado previo y posterior a la secuencia didáctica.

Tabla 5.- Resultados pregunta 3 pre-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	1		si		
02_SG	1			si	
03_JG	0				si
04_JH	0			si	
05_JM	1				si
06_CM	0				si
07_JO	0			si	
08_PP	0				si
09_LS	1	si			

Tabla 6.- Resultados pregunta 3 post-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	1	si			
02_SG	1	si			
03_JG	1	si			
04_JH	1	si			
05_JM	0			si	
06_CM	0		si		
07_JO	1	si			
08_PP	1	si			
09_LS	1	si			

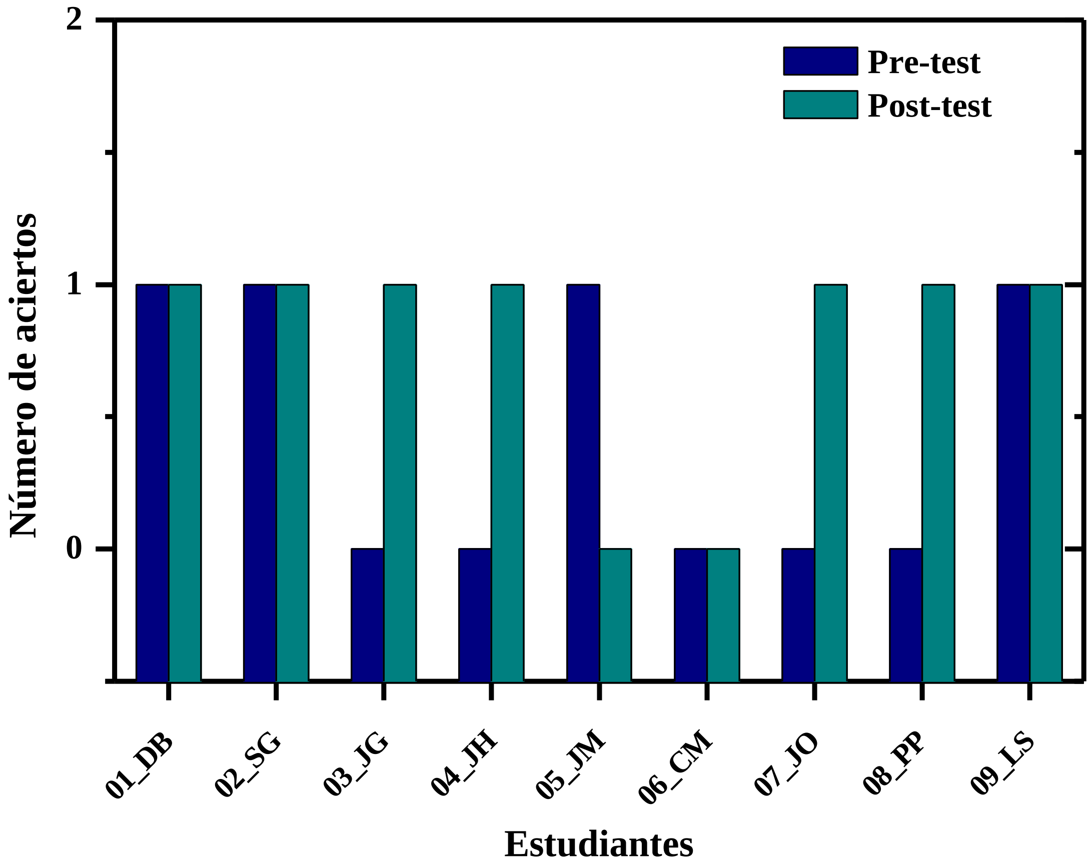


Figura 6.- Comparativo de las respuestas a la pregunta 3 del pre-test y post-test para cada estudiante del grupo experimental en el que se aplicó la secuencia didáctica para la enseñanza de las integrales dobles.

8.1.4 Resultados grupales pregunta 4

La pregunta 4 podemos observarla en la **Figura 7** el reactivo pretende evaluar la comprensión para construir una integral doble, deberá utilizar su interpretación de las ecuaciones que establecen los límites de la región, para proponer una solución en su forma de integral doble con los elementos correctos de orden de integración y definición de intervalos de integración. Los resultados del pre-test se muestran en la **Tabla 7**, podemos observar un promedio de 67% respuestas correctas en el grupo. Los resultados del post-test se muestran en la **Tabla 8**, podemos observar un promedio de 78% respuestas correctas en el grupo. En la **Figura 8** se muestra la comparación del pre-test con el post-test con una mejora del 11%.

Elija la integral que representa el área de la región delimitada por las gráficas de

$y = x$, $y = x - 1$, $x = 0$, y $x = 2$:

A. $\int_0^2 \int_{-1}^{x} dydx$

B. $\int_{-1}^2 \int_0^2 dxdy$

C. $\int_0^2 \int_{x-1}^{x} dydx$

D. $\int_{x-1}^{x} \int_0^2 dxdy$

Figura 7.- Pregunta 4 del examen aplicado previo y posterior a la secuencia didáctica.

Tabla 7.- Resultados pregunta 4 pre-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	0				si
02_SG	0				si
03_JG	1				si
04_JH	1				si
05_JM	1				si
06_CM	0				si
07_JO	1				si
08_PP	1				si
09_LS	1				si

Tabla 8.- Resultados pregunta 4 post-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	1				si
02_SG	1	si			si
03_JG	0			si	
04_JH	1				si
05_JM	1			si	
06_CM	1				si
07_JO	0				si
08_PP	1	si			
09_LS	1				si

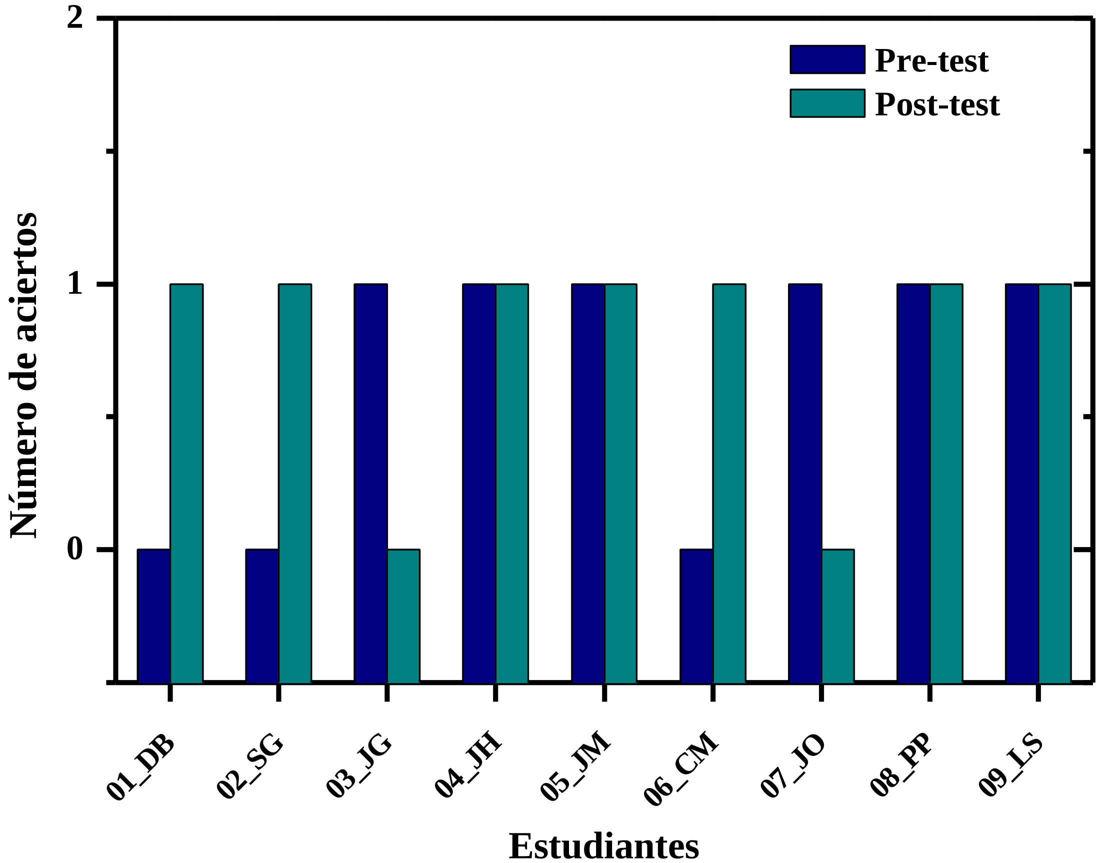


Figura 8.- Comparativo de las respuestas a la pregunta 4 del pre-test y post-test para cada estudiante del grupo experimental en el que se aplicó la secuencia didáctica para la enseñanza de las integrales dobles.

8.1.5 Resultados grupales pregunta 5

La pregunta 5 podemos observarla en la **Figura 9** el reactivo pretende evaluar la comprensión para construir una integral doble, deberá utilizar su interpretación de las ecuaciones que establecen los límites de la región, también debe comprender la relación de las integrales dobles con el volumen de un sólido, para proponer una solución en su forma de integral doble con los elementos correctos de orden de integración y definición de intervalos de integración. Los resultados del pre-test se muestran en la **Tabla 9**, podemos observar un promedio de 0% respuestas correctas en el grupo. Los resultados del post-test se muestran en la **Tabla 10**, podemos observar un promedio de 39% respuestas correctas en el grupo. En la **Figura 10** se muestra la comparación del pre-test con el post-test con una mejora del 39%.

Encuentre el volumen del sólido delimitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $y + z = 4$ y $z = 0$

A. $\frac{16}{3}(3\pi - 2)$

B. 16π

C. $16\pi - 32$

D. $16\pi - 32\sqrt{2}$

Figura 9.- Pregunta 5 del examen aplicado previo y posterior a la secuencia didáctica.

Tabla 9.- Resultados pregunta 5 pre-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	0			si	
02_SG	0				si
03_JG	0				si
04_JH	0			si	
05_JM	0				si
06_CM	0				si
07_JO	0				si
08_PP	0				si
09_LS	0				si

Tabla 10.- Resultados pregunta 5 post-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	1	si			
02_SG	1	si			
03_JG	0			si	
04_JH	0				si
05_JM	0.5		si		
06_CM	0			si	
07_JO	0				si
08_PP	1	si			
09_LS	0				si

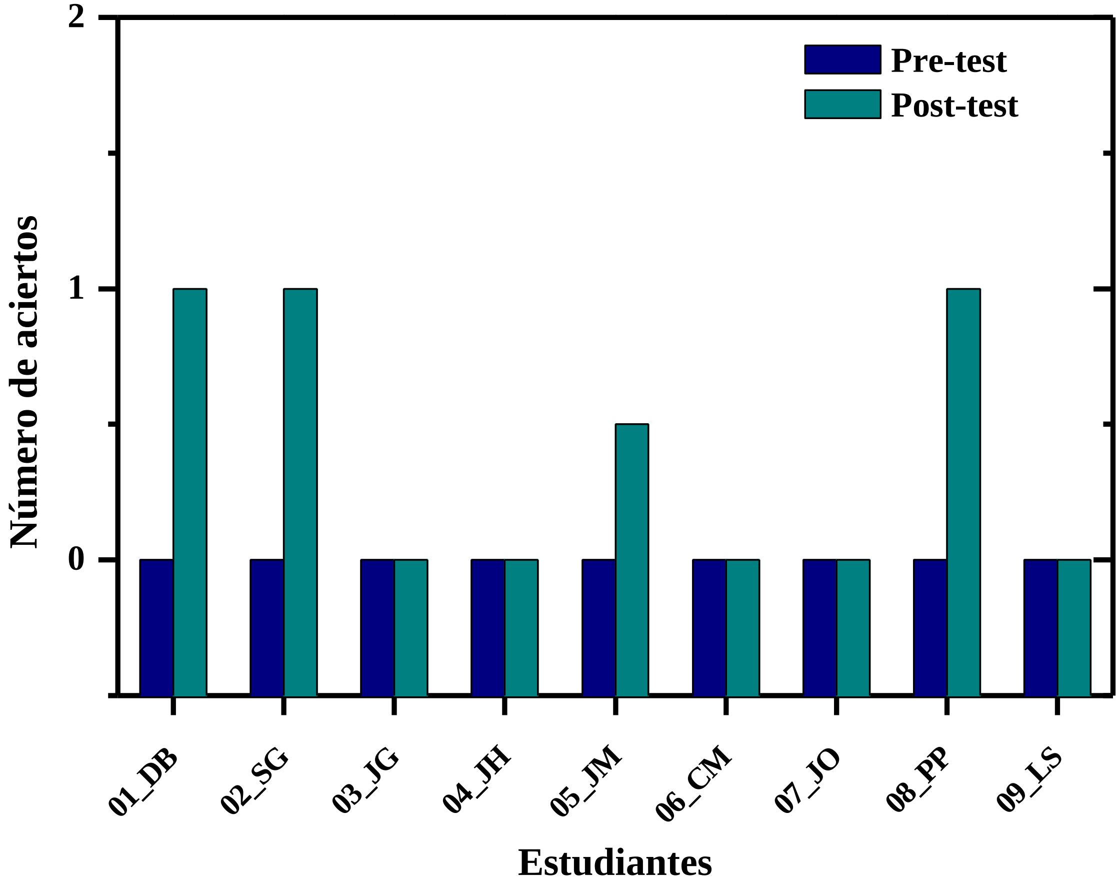


Figura 10.- Comparativo de las respuestas a la pregunta 5 del pre-test y post-test para cada estudiante del grupo experimental en el que se aplicó la secuencia didáctica para la enseñanza de las integrales dobles.

8.1.6 Resultados grupales pregunta 6

La pregunta 6 podemos observarla en la **Figura 11** el contenido del ejercicio a resolver pretende evaluar el conocimiento y habilidad del tema de integrales dobles, demostrando su comprensión para comprender los límites de integración la región que representan y así identificar si se puede llevar a cabo el cambio de orden de integración. Los resultados del pre-test se muestran en la **Tabla 11**, podemos observar un promedio de 44% respuestas correctas en el grupo. Los resultados del post-test se muestran en la **Tabla 12**, podemos observar un promedio de 79% respuestas correctas en el grupo. En la **Figura 12** se muestra la comparación del pre-test con el post-test con una mejora del 35%.

Invierta el orden de integración dado en la integral doble:

$$\int_{0}^{4}\int_{x/2}^{2} f(x,y)\,dy\,dx$$

A. $\int_0^2 \int_0^{2y} f(x,y)dxdy$

B. $\int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)dxdy$

C. $\int_0^2 \int_0^{y} f(x,y)dxdy$

D. $\int_0^2 \int_0^{2x} f(x,y)dxdy$

Figura 11.- Pregunta 6 del examen aplicado previo y posterior a la secuencia didáctica.

Tabla 11.- Resultados pregunta 6 pre-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	0				si
02_SG	1	si			
03_JG	0			si	
04_JH	0				si
05_JM	1	si			
06_CM	0				si
07_JO	1				si
08_PP	0				si
09_LS	1	si			

Tabla 12.- Resultados pregunta 6 post-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	1	si			
02_SG	1	si			
03_JG	0			si	
04_JH	1		si		
05_JM	1	si			
06_CM	0				si
07_JO	1	si			
08_PP	1	si			si
09_LS	1	si			

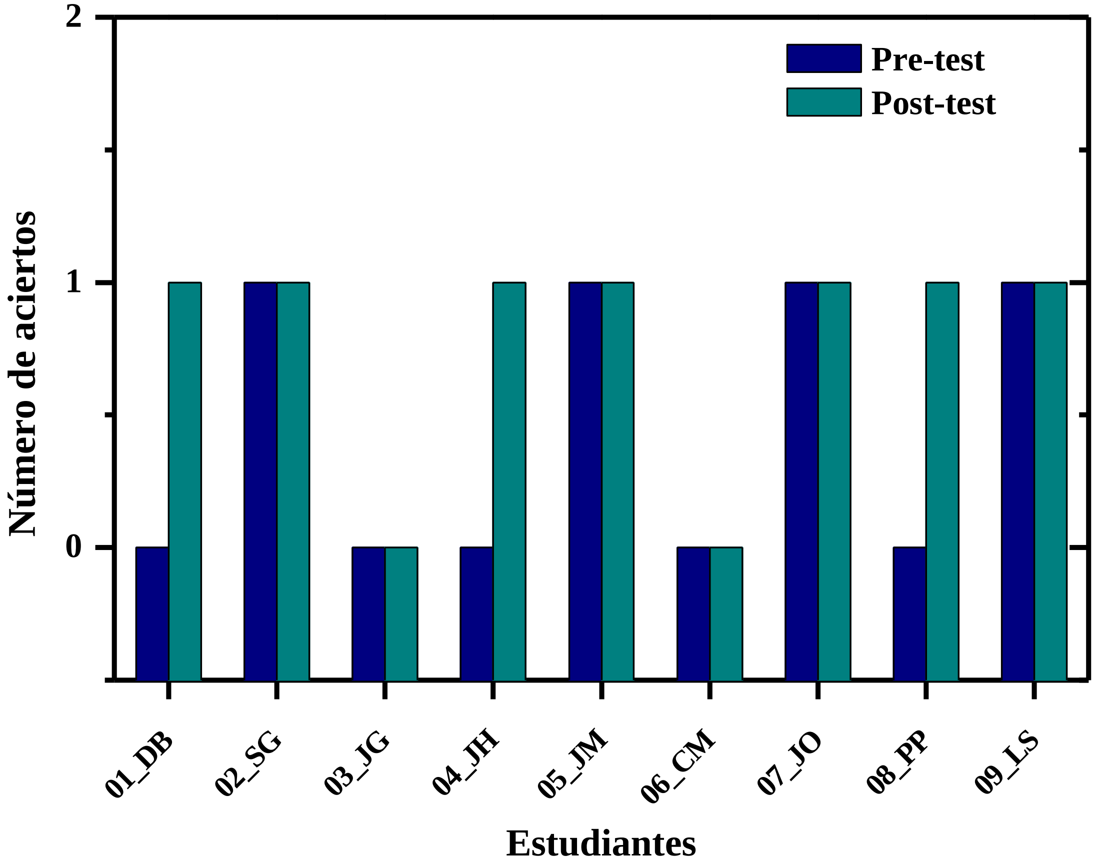


Figura 12.- Comparativo de las respuestas a la pregunta 6 del pre-test y post-test para cada estudiante del grupo experimental en el que se aplicó la secuencia didáctica para la enseñanza de las integrales dobles.

8.1.7 Resultados grupales pregunta 7

La pregunta 7 podemos observarla en la **Figura 13** el reactivo pretende evaluar la comprensión para construir una integral doble, deberá utilizar su interpretación de las ecuaciones que establecen los límites de la región, también debe comprender la relación de las integrales dobles con el volumen de un sólido, para proponer una solución en su forma de integral doble con los elementos correctos de orden de integración y definición de intervalos de integración. Los resultados del pre-test se muestran en la **Tabla 13**, podemos observar un promedio de 22% respuestas correctas en el grupo. Los resultados del post-test se muestran en la **Tabla 14**, podemos observar un promedio de 56% respuestas correctas en el grupo. En la **Figura 14** se muestra la comparación del pre-test con el post-test con una mejora del 34%.

Elija la integral que representa el volumen del sólido en el primer octante acotado por:

$$x + 2y + 3z = 6$$

A. $\int_0^6 \int_0^{\frac{(6-x)}{2}} \left(2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right) dydx$

B. $\int_0^6 \int_0^{3-x} \left(2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right) dydx$

C. $\int_0^6 \int_0^{3-x} (6 - x - 2y) dydx$

D. $\int_0^6 \int_0^{6-2y} \left(2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right) dydx$

Figura 13.- Pregunta 7 del examen aplicado previo y posterior a la secuencia didáctica.

Tabla 13.- Resultados pregunta 7 pre-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	0				si
02_SG	0		si		
03_JG	0				si
04_JH	0				si
05_JM	0				si
06_CM	0				si
07_JO	1			si	
08_PP	0				si
09_LS	1				si

Tabla 14.- Resultados pregunta 7 post-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	1	si			
02_SG	0				si
03_JG	0		si		
04_JH	1				si
05_JM	0			si	
06_CM	0				si
07_JO	1	si			
08_PP	1	si			
09_LS	1	si			

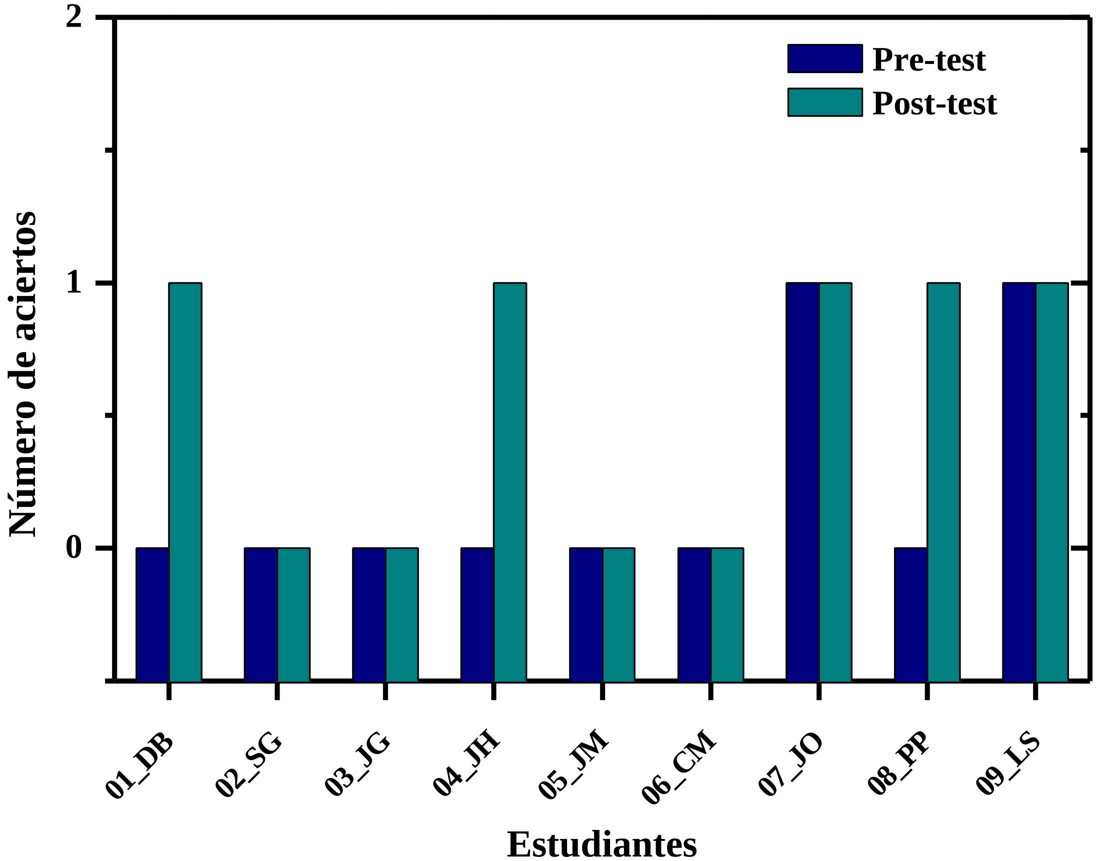


Figura 14.- Comparativo de las respuestas a la pregunta 7 del pre-test y post-test para cada estudiante del grupo experimental en el que se aplicó la secuencia didáctica para la enseñanza de las integrales dobles.

8.1.8 Resultados grupales pregunta 8

La pregunta 8 podemos observarla en la **Figura 15** el reactivo pretende evaluar la comprensión para construir una integral doble, tendrá que utilizar su interpretación de las ecuaciones que establecen los límites de la región cuando estas están escritas ya en forma de integral, también debe comprender la relación de las integrales dobles con el área de una región, para proponer una solución en su forma de integral doble con los elementos correctos haciendo el cambio de orden de integración y definición de intervalos de integración. Los resultados del pre-test se muestran en la **Tabla 15**, podemos observar un promedio de 22% respuestas correctas en el grupo. Los resultados del post-test se muestran en la **Tabla 16**, podemos observar un promedio de 67% respuestas correctas en el grupo. En la **Figura 16** se muestra la comparación del pre-test con el post-test con una mejora del 45%.

El área de la región R viene dada por $\int_0^1 \int_0^y d_x d_y + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-y}} d_x d_y$. Dibuje la región R y calcule la integral en el orden $d_y d_x$.

A. $\int_x^{2-x^2} \int_0^1 dydx = \frac{7}{6}$

B. $\int_0^1 \int_x^{2-x^2} dydx = \frac{7}{6}$

C. $\int_0^1 \int_x^1 dydx + \int_1^{\sqrt{2-y}} \int_0^1 dydx = \frac{7}{6}$

D. $\int_0^1 \int_0^{2-x^2} dydx = \frac{7}{6}$

Figura 15.- Pregunta 8 del examen aplicado previo y posterior a la secuencia didáctica.

Tabla 15.- Resultados pregunta 8 pre-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	0			si	
02_SG	0				si
03_JG	0				si
04_JH	0			si	
05_JM	0			si	
06_CM	0				si
07_JO	1				si
08_PP	1	si			
09_LS	0			si	

Tabla 16.- Resultados pregunta 8 post-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	1	si			
02_SG	1	si			
03_JG	0.5		si		
04_JH	0.5		si		
05_JM	0				si
06_CM	0				si
07_JO	1	si			
08_PP	1	si			
09_LS	1	si			

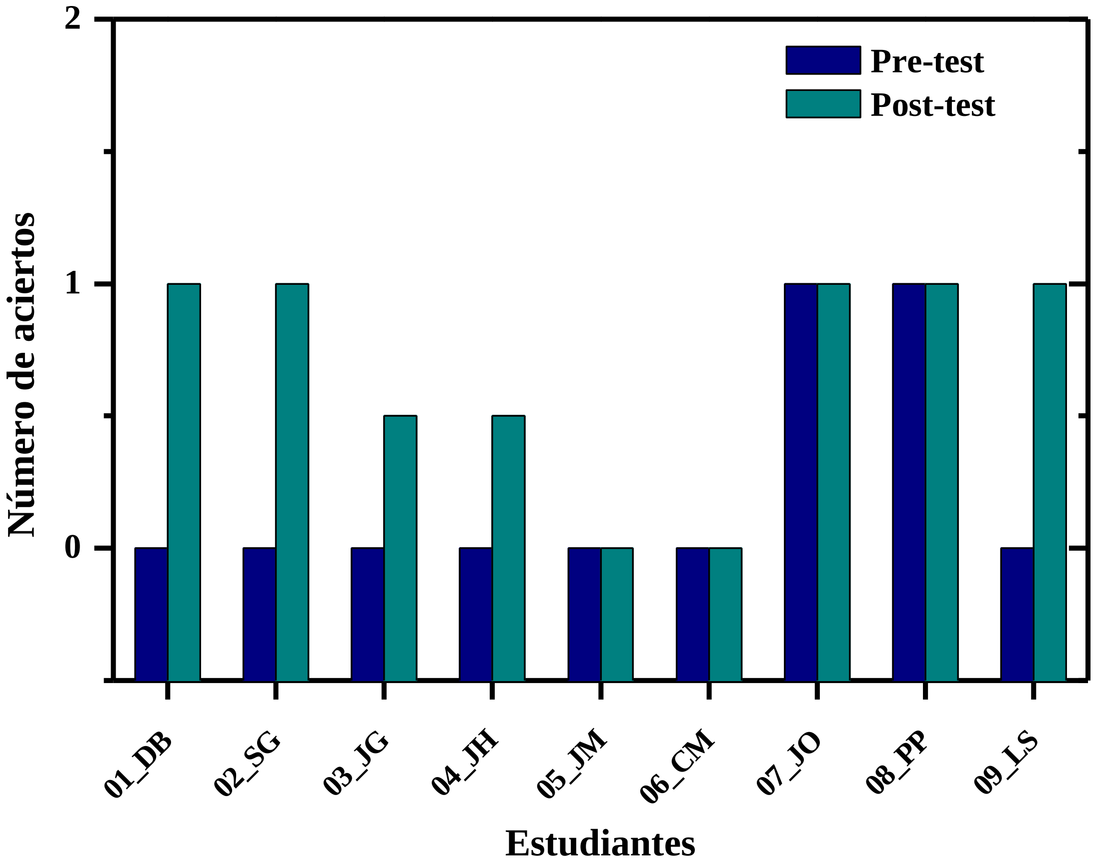


Figura 16.- Comparativo de las respuestas a la pregunta 8 del pre-test y post-test para cada estudiante del grupo experimental en el que se aplicó la secuencia didáctica para la enseñanza de las integrales dobles.

8.1.9 Resultados grupales pregunta 9

La pregunta 9 podemos observarla en la **Figura 17** el reactivo pretende evaluar la comprensión para construir una integral doble, deberá utilizar su interpretación de las ecuaciones que establecen los límites de la región, identificar qué tipo de región es la que está analizando si esta es tipo I, II o III como también es se puede integrar como una sola región o como una unión de subregiones, para proponer una solución en su forma de integral doble con los elementos correctos de orden de integración una vez interpretada el que tipo de región y definir los intervalos de integración. Los resultados del pre-test se muestran en la **Tabla 17**, podemos observar un promedio de 0% respuestas correctas en el grupo. Los resultados del post-test se muestran en la **Tabla 18**, podemos observar un promedio de 39% respuestas correctas en el grupo. En la **Figura 18** se muestra la comparación del pre-test con el post-test con una mejora del 39%.

Considere la región R mostrada en el gráfico. Esta región está delimitada por las curvas $y = 0; y = 4; y = 4 - (x + 2)^2$ y $x + y = 4$. Plantear la integral doble en el orden $d_y d_x$.

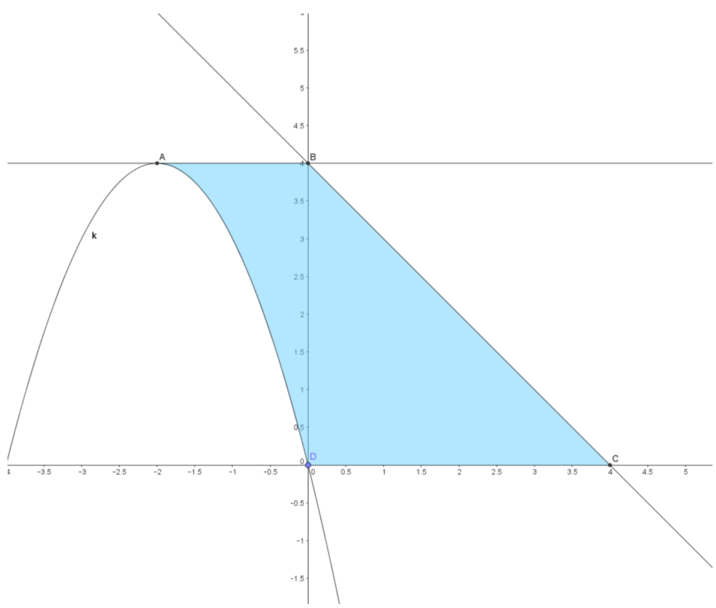


Figura 17.- Pregunta 9 del examen aplicado previo y posterior a la secuencia didáctica.

Tabla 17.- Resultados pregunta 9 pre-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	0			si	
02_SG	0			si	
03_JG	0				si
04_JH	0			si	
05_JM	0			si	
06_CM	0				si
07_JO	0				si
08_PP	0			si	
09_LS	0				si

Tabla 18.- Resultados pregunta 9 post-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	0			si	
02_SG	0.5		si		
03_JG	0.5			si	
04_JH	0.5			si	
05_JM	0.5			si	
06_CM	0				si
07_JO	0.5			si	
08_PP	0				si
09_LS	1	si			

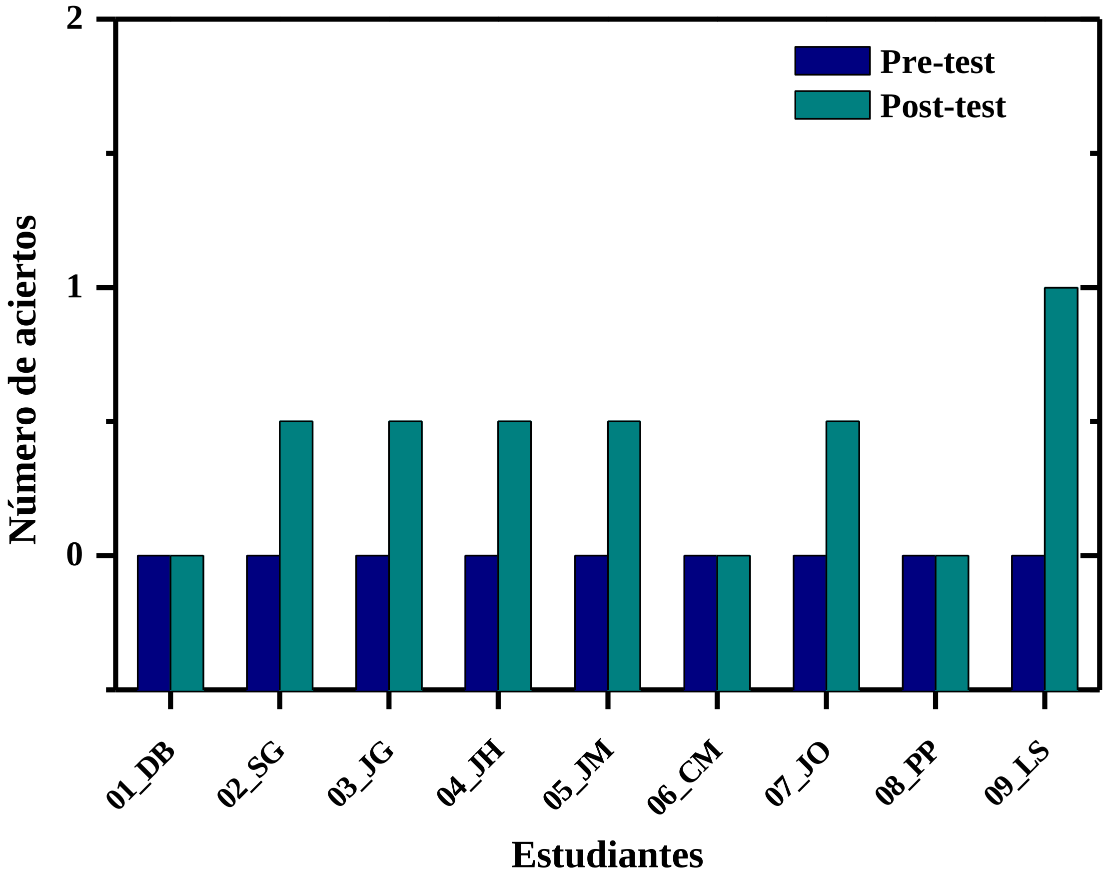


Figura 18.- Comparativo de las respuestas a la pregunta 9 del pre-test y post-test para cada estudiante del grupo experimental en el que se aplicó la secuencia didáctica para la enseñanza de las integrales dobles.

8.1.10 Resultados grupales pregunta 10

La pregunta 10 podemos observarla en la **Figura 19** el reactivo pretende evaluar la comprensión para construir una integral doble, deberá utilizar su interpretación de las ecuaciones que establecen los límites de la región, identificar qué tipo de región es la que está analizando si esta es tipo I, II o III como también es se puede integrar como una sola región o como una unión de subregiones, para proponer una solución en su forma de integral doble con los elementos correctos de orden de integración una vez interpretada el que tipo de región y definir los intervalos de integración. Los resultados del pre-test se muestran en la **Tabla 19**, podemos observar un promedio de 0% respuestas correctas en el grupo. Los resultados del post-test se muestran en la **Tabla 20**, podemos observar un promedio de 50% respuestas correctas en el grupo. En la **Figura 20** se muestra la comparación del pre-test con el post-test con una mejora del 50%.

Considere la región R mostrada en el gráfico. Esta región está delimitada por las curvas $y = 0; y = 4; y = 4 - (x + 2)^2$ y $x + y = 4$. Plantear la integral doble en el orden $d_x d_y$.

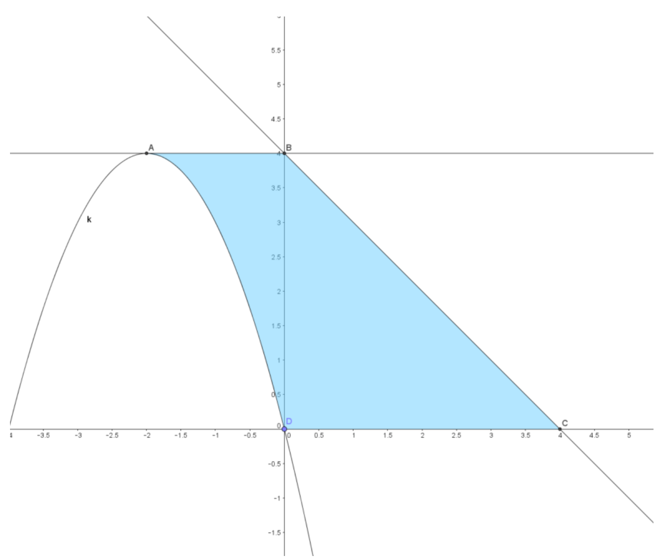


Figura 19.- Pregunta 10 del examen aplicado previo y posterior a la secuencia didáctica.

Tabla 19.- Resultados pregunta 10 pre-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	0			si	
02_SG	0			si	
03_JG	0				si
04_JH	0			si	
05_JM	0				si
06_CM	0				si
07_JO	0				si
08_PP	0			si	
09_LS	0				si

Tabla 20.- Resultados pregunta 10 post-test

Estudiantes	Calificación	Procedimiento correcto	Procedimiento correcto-incompleto	Procedimiento no correcto	Sin procedimiento
01_DB	0.5		si		
02_SG	1	si			
03_JG	0			si	
04_JH	0.5		si		
05_JM	0.5			si	
06_CM	0				si
07_JO	0			si	
08_PP	1	si			
09_LS	1	si			

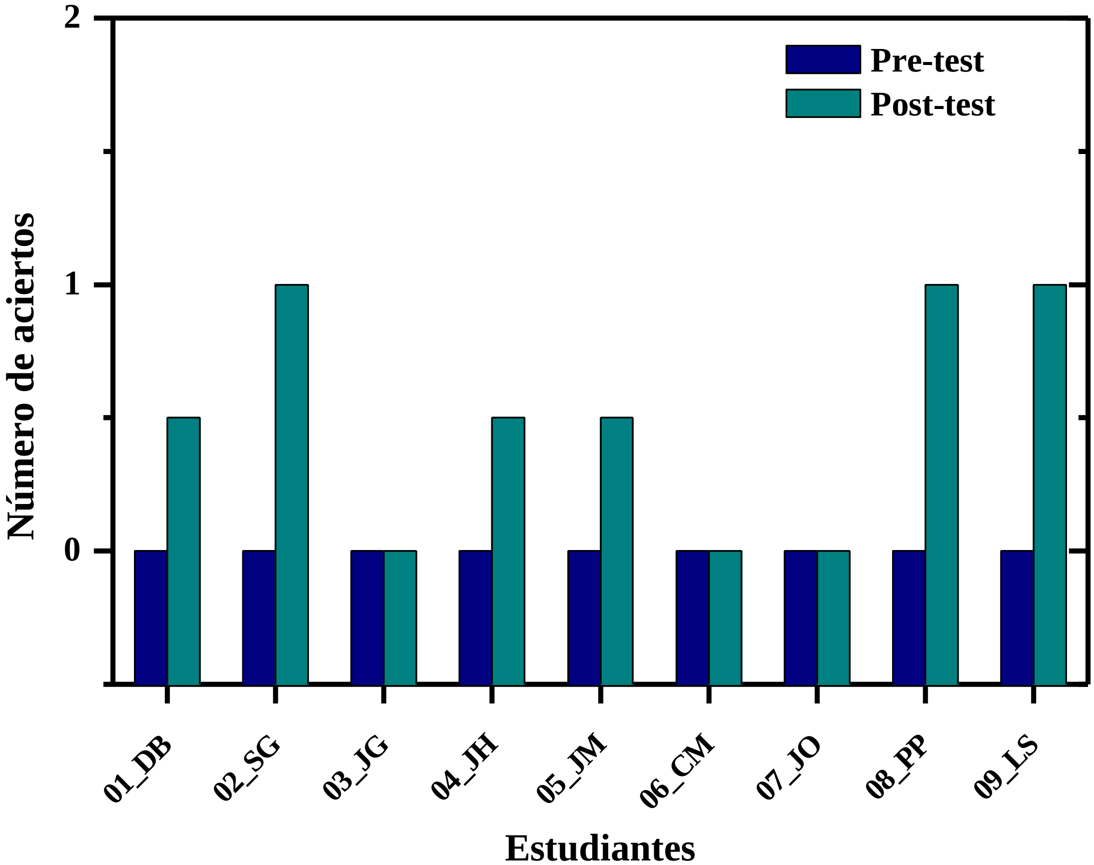


Figura 20.- Comparativo de las respuestas a la pregunta 10 del pre-test y post-test para cada estudiante del grupo experimental en el que se aplicó la secuencia didáctica para la enseñanza de las integrales dobles.

8.2 Análisis estadístico del grupo control contra el experimental

Para el análisis estadístico, presentamos una prueba de hipótesis para establecer que entre el grupo control y el experimental no existe una diferencia entre sus promedios de aciertos en las preguntas en el pre-test. Por otro lado, en una segunda hipótesis se establece que existe una mejora (diferencia) entre el pre-test y post-test aplicados al grupo experimental. Por último, en una tercera hipótesis se establece que existe una diferencia entre el promedio de aciertos del grupo control y experimental en el post-test.

8.2.1 Prueba de hipótesis en resultados pre-test en grupo control y experimental

Podemos observar los resultados de los promedios de los aciertos en las preguntas del pre-test aplicado a los grupos de control y experimental en la **Tabla 21**, para evaluar la diferencia entre los resultados obtenidos y si presentan una diferencia, se aplicó una prueba de hipótesis respecto a la diferencia entre dos medias.

Tabla 21.- Promedio de los aciertos obtenidos en las preguntas del pre-test en los grupos control y experimental

Pregunta	Pre-test control	Pre-test experimental
1	0.40	0.71
2	0.67	0.44
3	0.50	0.44
4	0.58	0.67
5	0.33	0.00
6	0.42	0.44
7	0.33	0.22
8	0.25	0.22
9	0.00	0.00
10	0.00	0.00

Sean μ_1 y μ_2 la media de los aciertos obtenidos por pregunta del grupo control y experimental en el pre-test, respectivamente. Por tanto, como se busca evidencia para probar que $\mu_1 = \mu_2$, se puede probar la hipótesis nula

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

contra la hipótesis alternativa

$$H_a: \mu_1 > \mu_2$$

Para efectuar la prueba *t* para dos muestras independientes se supone que las poblaciones muestreadas son normales y tienen la misma varianza. Las gráficas de tallo y hoja de la **Figura 21** muestran al menos un patrón de montículo, de modo que la suposición de normalidad es razonable, podemos resaltar para el caso que si las desviaciones son moderadas desde la normalidad no afectan seriamente la distribución del estadístico de prueba, en especial en tamaños muestrales casi iguales.

Pre-test control		Pre-test experimental	
0	00	0	000
0.1		0.1	
0.2	5	0.2	22
0.3	33	0.3	
0.4	02	0.4	444
0.5	08	0.5	
0.6	7	0.6	7
0.7		0.7	1

Figura 21.- Grafico de tallo y hoja para pre-test en grupo control y experimental

Valores medios de las muestras

$$\overline{x_1} = 0.3483 \; y \; \overline{x_2} = 0.3156$$

Desviación estándar de las dos muestras

$$s_1 = 0.2210 \; y \; s_2 = 0.2679$$

No son tan diferentes las dos distribuciones y tienen la misma forma. En vista que la razón de las dos varianzas es $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 0.6805$ (menor que 3), se tiene seguridad al suponer que las varianzas son iguales. Con estas dos suposiciones se calculó la estimación agrupada de la varianza común como

$$s^2 = \frac{(10-1)(0.2210)^2 + (10-1)(0.2679)^2}{10+10-2} = 0.0603$$

Se calculó el estadístico de prueba

$$t = \frac{(0.3483 - 0.3156)}{\sqrt{(0.0603)\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)}} = 0.2978$$

La hipótesis alternativa $H_a\!: \mu_1 > \mu_2$ implica que se debe usar una prueba de una cola en la cola superior de la distribución *t* con $(n_1 + n_2 - 2) = 18$ grados de libertad. Se puede encontrar el valor crítico para una región de rechazo con $\alpha = 0.05$ y H_0 será rechazada si $t > 1.734$. Comparando el valor del estadístico de prueba $t = 0.2978$ con el valor crítico $t_{.050} = 1.734$, no se puede rechazar la hipótesis nula. La evidencia indica que el promedio de aciertos para cada pregunta del pre-test entre el grupo control y el experimental no tienen una diferencia significativa al nivel de confianza del 5%.

8.2.2 Prueba de hipótesis en resultados pre-test y post-test en grupo experimental

Podemos observar los resultados de los promedios de los aciertos en las preguntas del pre-test y post-test aplicado al grupo experimental en la **Tabla 22**, para evaluar la diferencia entre los resultados obtenidos y si presentan una diferencia, se aplicó una prueba de hipótesis respecto a la diferencia entre dos medias.

Tabla 22.- Promedio de los aciertos obtenidos en las preguntas del pre-test y post-test en el grupo experimental

Pregunta	Pre-test experimental	Post-test experimental
1	0.71	0.96
2	0.44	0.94
3	0.44	0.78
4	0.67	0.78
5	0.00	0.38
6	0.44	0.78
7	0.22	0.56
8	0.22	0.67
9	0.00	0.39
10	0.00	0.50

Sean μ_1 y μ_2 la media de los aciertos obtenidos por pregunta del pre-test y post-test del grupo experimental, respectivamente. Por tanto, como se busca evidencia para probar que $\mu_1 < \mu_2,$ se puede probar la hipótesis nula

$$H_0: \mu_1 < \mu_2$$

contra la hipótesis alternativa

$$H_a: \mu_1 > \mu_2$$

Para efectuar la prueba *t* para dos muestras independientes se supone que las poblaciones muestreadas son normales y tienen la misma varianza. Las gráficas de tallo y hoja de la **Figura 22** muestran al menos un patrón de montículo, de modo que la suposición de normalidad es razonable, podemos resaltar para el caso que si las desviaciones son moderadas desde la normalidad no afectan seriamente la distribución del estadístico de prueba, en especial en tamaños muestrales casi iguales.

Pre-test experimental		Post-test experimental	
0	000	0	
0.1		0.1	
0.2	22	0.2	
0.3		0.3	89
0.4	444	0.4	
0.5		0.5	06
0.6	7	0.6	7
0.7	1	0.7	888
0.8		0.8	
0.9		0.9	46

Figura 22.- Grafico de tallo y hoja para pre-test y post-test en el grupo experimental

Valores medios de las muestras

$$\overline{x_1} = 0.3156 \; y \; \overline{x_2} = 0.6733$$

Desviación estándar de las dos muestras

$$s_1 = 0.2679 \; y \; s_2 = 0.2086$$

No son tan diferentes las dos distribuciones y tienen la misma forma. En vista que la razón de las dos varianzas es $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.6494$ (menor que 3), se tiene seguridad al suponer que las varianzas son iguales. Con estas dos suposiciones se calculó la estimación agrupada de la varianza común como

$$s^2 = \frac{(10-1)(0.2679)^2 + (10-1)(0.2086)^2}{10+10-2} = 0.0576$$

Se calculó el estadístico de prueba

$$t = \frac{(0.3156 - 0.6733)}{\sqrt{(0.0576)\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)}} = -3.3327$$

La hipótesis alternativa $H_a: \mu_1 > \mu_2$ implica que se debe usar una prueba de una cola en la cola superior de la distribución t con $(n_1 + n_2 - 2) = 18$ grados de libertad. Se puede encontrar el valor crítico para una región de rechazo con $\alpha = 0.05$ y H_0 será rechazada si $t > 1.734$. Comparando el valor del estadístico de prueba $t = -3.3327$ con el valor critico $t_{.050} = 1.734$, no se puede rechazar la hipótesis nula. La evidencia indica que el promedio de aciertos para cada pregunta del post-test es mayor al promedio de aciertos para cada pregunta del pre-test en el grupo experimental, con una diferencia significativa al nivel de confianza del 5%.

8.2.3 Prueba de hipótesis en resultados post-test en grupo control y experimental

Podemos observar los resultados de los promedios de los aciertos en las preguntas del post-test aplicado al grupo control y experimental en la **Tabla 23**, para evaluar la diferencia entre los resultados obtenidos y si presentan una diferencia, se aplicó una prueba de hipótesis respecto a la diferencia entre dos medias.

Tabla 23.- Promedio de los aciertos obtenidos en las preguntas del post-test en los grupos control y experimental

Pregunta	Post-test control	Post-test experimental
1	0.63	0.96
2	0.75	0.94
3	0.58	0.78
4	0.58	0.78
5	0.33	0.38
6	0.50	0.78
7	0.33	0.56
8	0.42	0.67
9	0.00	0.39
10	0.00	0.50

Sean μ_1 y μ_2 la media de los aciertos obtenidos por pregunta del post-test en los grupos control y experimental, respectivamente. Por tanto, como se busca evidencia para probar que $\mu_1 < \mu_{2,}$ se puede probar la hipótesis nula

$$H_0: \mu_1 < \mu_2$$

contra la hipótesis alternativa

$$H_a: \mu_1 > \mu_2$$

Para efectuar la prueba *t* para dos muestras independientes se supone que las poblaciones muestreadas son normales y tienen la misma varianza. Las gráficas de tallo y hoja de la **Figura 23** muestran al menos un patrón de montículo, de modo que la suposición de normalidad es razonable, podemos resaltar para el caso que si las desviaciones son moderadas desde la normalidad no afectan seriamente la distribución del estadístico de prueba, en especial en tamaños muestrales casi iguales.

Post-test control		Post-test experimental	
0	00	0	
0.1		0.1	
0.2		0.2	
0.3	33	0.3	89
0.4	2	0.4	
0.5	088	0.5	06
0.6	3	0.6	7
0.7	5	0.7	888
0.8		0.8	
0.9		0.9	46

Figura 23.- Grafico de tallo y hoja para post-test en grupo control y experimental

Valores medios de las muestras

$$\overline{x_1} = 0.4133 \; y \; \overline{x_2} = 0.6733$$

Desviación estándar de las dos muestras

$$s_1 = 0.2542 \; y \; s_2 = 0.2086$$

No son tan diferentes las dos distribuciones y tienen la misma forma. En vista que la razón de las dos varianzas es $\frac{s_1^2}{s_2^2} = 1.4849$ (menor que 3), se tiene seguridad al suponer que las varianzas son iguales. Con estas dos suposiciones se calculó la estimación agrupada de la varianza común como

$$s^2 = \frac{(10-1)(0.2542)^2 + (10-1)(0.2086)^2}{10+10-2} = 0.0541$$

Se calculó el estadístico de prueba

$$t = \frac{(0.4133 - 0.6733)}{\sqrt{(0.0541)\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10}\right)}} = -2.4995$$

La hipótesis alternativa $H_a: \mu_1 > \mu_2$ implica que se debe usar una prueba de una cola en la cola superior de la distribución t con $(n_1 + n_2 - 2) = 18$ grados de libertad. Se puede encontrar el valor crítico para una región de rechazo con $\alpha = 0.05$ y H_0 será rechazada si $t > 1.734$. Comparando el valor del estadístico de prueba $t = -2.4995$ con el valor critico $t_{.050} = 1.734$, no se puede rechazar la hipótesis nula. La evidencia indica que el promedio de aciertos para cada pregunta del post-test en el grupo experimental es mayor al promedio de aciertos para cada pregunta del post-test en el grupo control, con una diferencia significativa al nivel de confianza del 5%.

8.3 Análisis de promedios en los pre-test y post-test

Se puede observar en la tabla los porcentajes del promedio de aciertos en el grupo control y experimental.

Tabla 24.- Promedios de aciertos para grupo control y experimental, obtenidos en el examen pre-test y post-test

Grupo/test	% de aciertos
Control/pre-test	35±8
Experimental/pre-test	32±7
Control/post-test	41±8
Experimental/post-test	67±7

9. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Utilizar la aplicación del software interactivo GeoGebra como herramienta, fue un apoyo significativo para el proceso enseñanza y de aprendizaje del Cálculo Vectorial. Se logró desarrollar algunas competencias como la capacidad para identificar, plantear y resolver problemas, y mejorar la habilidad en el uso de las TIC. Como GeoGebra ayuda a los estudiantes para lograr la visualización y con ello lograr relacionar diferentes representaciones, y hacer la relación entre las ecuaciones algebraicas y su representación gráfica, lo cual permite a los estudiantes mejorar el proceso de enseñanza aprendizaje de las integrales dobles y su evaluación. Concuerda con la conclusión "Emplear Applets y el software GeoGebra junto a la visualización como elemento pedagógico, fue un apoyo significativo a través del proceso de enseñanza y de aprendizaje del cálculo. Promovió una buena práctica de la enseñanza y potenció del pensamiento matemático en los estudiantes" (Rojas y Esteban, 2012).

Se lograron identificar varias diferencias entre el grupo control y el grupo experimental, los estudiantes del grupo control no lograron procesar la relación entre las ecuaciones y su representación en dos y tres dimensiones como consecuencia de esto los alumnos no logran entender el significado de las integrales dobles y su utilidad, lo que tiene como consecuencia que no logran formular la integral doble, así como sus límites y con ello no poder resolver correctamente su evaluación.

Como podemos observar en la **Tabla 24** los resultados en el grupo control y el experimental en el pre-test fueron de 35±8% y 32±7% de aciertos respectivamente, lo que muestra que los resultados del grupo control fueron muy similares a los que mostro el grupo experimental. Los resultados mostrados en el grupo control donde no se implementó la estrategia didáctica y los del grupo experimental donde se llevó a cabo la estrategia didáctica fueron de 41±8% y 67±7% de aciertos respectivamente, lo que nos muestra una diferencia significativa en ambos grupos. Podemos ver que estos resultados concuerdan con la investigación realizada por Avecilla, Cárdenas, Barahona y Ponce (Avecilla, et al., 2015), sobre el rendimiento académico de los estudiantes, cuando se desarrolla su proceso de aprendizaje sin el apoyo de la herramienta GeoGebra y se compara con el rendimiento académico de los estudiantes cuando apoyan su proceso de aprendizaje con la herramienta GeoGebra. De lo observado estadísticamente y a través de la prueba de "t-student" se evidencia que el uso de la herramienta GeoGebra incide positivamente en el rendimiento académico de los estudiantes.

Podemos concluir que se logró el objetivo que era verificar si el uso de GeoGebra como herramienta para la enseñanza del Cálculo Vectorial impacta positivamente en el desarrollo de las habilidades matemáticas, y concuerda con los resultados reportados por las investigaciones de otros autores (Ortiz Hermosillo y Rosario Lopez, 2020; Del Río, 2020; Ruiz, et al., 2019; Jiménez y Jiménez 2017; Ramirez Inca y Nesterova, 2021), acercando a los estudiantes a modelar las soluciones a problemas reales de la vida cotidiana.

10. BIBLIOGRAFÍA

Acevedo, D., Torres, J. D. y Jiménez, M. J. (2015). Factores asociados a la repetición de cursos y retraso en la graduación en programas de ingeniería de la universidad de cartagena, en Colombia. *Formacion Universitaria*. https://doi.org/10.4067/S0718-50062015000200006

Akcay, A. O. (2017). Instructional Technologies and Pre-Service Mathematics Teachers' Selection of Technology. *Journal of Education and Practice*.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*.

Artigue, M. (2004). Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? *Educación Matemática*.

Artigue, M., Chartier, G. y Orier, J.-L. (2000). Presentation of Other Research Works. En D. JL (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 247–271). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_9

Avecilla, F., Cárdenas, O., Barahona, B. y Ponce, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica-ESPOL*.

Bray, A. y Tangney, B. (2017). Technology usage in mathematics education research – A systematic review of recent trends. *Computers & Education*, *114*, 255–273. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2017.07.004

Cabero, J., Duarte, A. y Barroso, J. (1998). La piedra angular para la incorporación de los medios audiovisuales, informáticos y nuevas tecnologías en los contextos educativos: la formación y el perfeccionamiento del profesorado. *Edutec. Revista Electrónica de Tecnología Educativa*, *0*(8 SE-Artículos Revista: Sección general). https://doi.org/10.21556/edutec.1998.8.569

Camarena Gallardo, P. (2010). Aportaciones De Investigación Al Aprendizaje Y Enseñanza De La Matemática En Ingeniería. *Ingeniería en Comunicaciones y Electrónica*, 1–47. http://www.ai.org.mx/ai/archivos/ingresos/camarenagallardo/dra._patricia_camarena_gallardo.pdf

Camarena Gallardo, P. (2012). La modelación matemática en la formación del ingeniero. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*. https://doi.org/10.3895/s1982-873x2012000300001

Cantoral, R. (2001). Enseñanza de la matemáticas en la Educación Superior. *Revista Electrónica Sinéctica*.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Visualización y Pensamiento Matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*.

Castillo-Sánchez, M., Gamboa-Araya, R. y Hidalgo-Mora, R. (2020). Factores que influyen en la deserción y reprobación de estudiantes de un curso universitario de matemáticas. *Uniciencia*. https://doi.org/10.15359/ru.34-1.13

Castillo, S. (2008). Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*.

Costa, V. A. y Arlego, M. (2011). Enseñanza del cálculo vectorial en el contexto de la ingeniería: una revisión bibliográfica. *Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática - ICIECyM. II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática - II ENEM*, 88–94. http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/121780

Costa, V., Arlego, M. y Otero, M. (2014). Enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad : propuesta de Recorridos de Estudio e Investigación. *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria (REFIEDU)*.

Del Río, L. S. (2020). Recursos para la enseñanza del Cálculo basados en GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657*, *9*(1), 120–131. https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p120-131

Del Rio, L. sombra. (2016). Enseñar y aprender cálculo con ayuda de la vista gráfica 3D de GeoGebra. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *17*(1), 1–13. https://doi.org/10.18845/rdmei.v17i1.2739

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*, 143–168.

Feo, R. (2010). Orientaciones básicas para el diseño de estrategias didácticas. *Tendencias pedagógicas.*

García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación*, *37*(1), 29–42.

Garcia Retana, J. A. (2009). La calculadora científica y la obtención de la respuesta correcta en el ciclo diversificado. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación"*, *9*, 1–19. http://revista.inie.ucr.ac.cr

García Retana, J. Á. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación*. https://doi.org/10.15517/revedu.v37i1.10627

Gatica, S. N. y Ares, O. E. (2012). La importancia de la visualización en el aprendizaje de conceptos matemáticos. *Edmetic*, *1*(2), 88–107. http://www.uco.es/revistas/index.php/edmetic/article/view/220

GeoGebra. (2022). *GeoGebra*. https://www.geogebra.org/

Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, Á. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10*, 91–110. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i10.144

Gotte, M. y Mantica, A. M. (2012). Estudio de particularidades del aprendizaje de la geometría tridimensional. *Revista de Educación Matemática*.

Guerrero Vázquez, J. A., Hernández Sierra, M. G., González Álvarez, R., Jiménez Aranda, J. S. y Pérez Salas, N. J. (2021). Estrategias efectivas para minimizar índices de reprobación en la carrera de Ingeniería informática. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, *5*(4), 5511–5525. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v5i4.704

Guevara Chaves, R. (1990). *La matemática y la actividad humana. Encuentros con Pascal* (1a ed.). EUNED.

Hernández Sampieri, R., Fernandez Collado, C. y Baptista Lucio, M. del P. (2010). Hernandez R, Fernández C, Baptista M. Metodología de la investigación. 5ta Ed.México: McGraw Hill; 2010. *Metodología de la investigación*.

Herrera, L., Montenegro, W. y Poveda, S. (2012). Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, *35*, 254–287. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=194224362014

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y. y Lavicza, Z. (2008). Teaching and calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. *11th International Congress on Mathematical Education*.

Holton, D., Artigue, M., Kirchgräber, U., Hillel, J., Niss, M. y Schoenfeld, A. (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (D. Holton (ed.); 1a ed.). Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7

Idris, N. (2009). Enhancing students' understanding in calculus trough writing. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(1), 36–55.

Jiménez Espinosa, A., Limas Berrío, L. J. y Alarcón González, J. E. (2016). Prácticas pedagógicas matemáticas de profesores de una institución educativa de enseñanza básica y media. *Praxis & Saber*, *7*(13), 127. https://doi.org/10.19053/22160159.4169

Jiménez, J. G. y Jiménez, S. (2017). GeoGebra, una propuesta para innovar el proceso enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Revista Electrónica sobre Tecnología, Educación y Sociedad*, *4*(7), 1–17. https://bit.ly/3jZoaYk

Justo López, A. C., Castro García, L., Aguilar Salinas, W. E. y de las Fuentes Lara, M. (2021). Digital educational strategies to support basic engineering science courses. *Apertura*, *13*(1), 52–67. https://doi.org/10.32870/Ap.v13n1.1983

Lagrange, J.-B., Artigue, M., Laborde, C. y Trouche, L. (2003). Technology and Mathematics Education: A Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 237–269). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0273-8_9

Lawless, K. A. y Pellegrino, J. W. (2007). Professional development in integrating technology into teaching and learning: knowns, unknowns, and ways to pursue better questions and answers. *Review of Educational Research*. https://doi.org/10.3102/0034654307309921

Lupiáñez, J. L. y Moreno-Armella, L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*.

Mainali, B. y Key, M. (2012). Using dynamic geometry software GeoGebra in developing countries: a case study of impressions of Mathematics teachers in Nepal. *International Journal for Mathematics*.

Majó, J. (2001). La revolución educativa en la era Internet. *Escuela Española*.

McCartan, C. D., Hermon, J. P. y Cunningham, G. (2010). A validated approach to teaching engineering mathematics. *Engineering Education 2010: Inspiring the Next Generation of Engineers, EE 2010*.

Medina Rivilla, A. y Salvador Mata, F. (2009). *Didáctica General* (Segunda).

Mendenhall, W., Beaver, Robert, J. y y Beaver, Barbara, M. (2010). Introducción a la probabilidad y estadística. En *Cengage Learning*.

Méndez Meza, O. Y. (2012). *Estrategias didácticas , herramientas , ambientes y entornos virtuales de aprendizaje en el área de matemáticas* [Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey]. https://repositorio.tec.mx/handle/11285/571391

Molero, M. (2009). Los medios tecnológicos y la enseñanza de las Matemáticas. *Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en la Ingeniería y la Arquitectura*, 123–145. http://bit.ly/2YsetuZ

Mora, C. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Pedagogía*.

Moreno Moreno, M. del M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo : evolución , estado actual y retos futuros. *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 81–96. http://funes.uniandes.edu.co/1325/1/Gonzalez2005El_SEIEM_81.pdf

Moreno Olivos, T. (2011). Didáctica de la Educación Superior: nuevos desafíos en el siglo XXI. *Perspectiva Educacional, Formación de Profesores*. https://doi.org/10.4151/07189729-Vol.50-Iss.2-Art.45

Novelo, C., Herrera, S., Días, J. y Salinas, H. (2015). Temor a las matemáticas : causa y efecto. *Revista Iberoamericana de Producción Académica y Gestión Educativa*.

Oliveros, S. (2011). La enseñanza de la matemática para los docentes de educación integral. *Revista Iberoamericana de Educación*, *55*(1), 1–3. https://doi.org/10.35362/rie5511634

Ortiz Hermosillo, C. A. y Rosario Lopez, J. R. (2020). Aplicación movil de geogebra, herramienta en la enseñanza del cálculo vectorial generadora de competencias. *Revista Electronica ANFEI Digital*, *12*. www.amfei.mx/revista

Porlán Ariza, R. (1989). *Teoría del conocimiento, teoría del enseñanza y desarrollo profesional. Las concepciones epistemológicas de los profesores.* Universidad de Sevilla.

Portillo-Lara, H. J., Ávila-Sandoval, M. S., Cruz-Quiñones, M. de los Á. y López-Ruvalcaba, C. (2019). Geogebra y Problemas de Optimización. *Cultura Científica y Tecnológica*. https://doi.org/10.20983/culcyt.2019.1.2.1

Ramirez Inca, M. E. y Nesterova, E. (2021). Las actividades con applets de GeoGebra para el aprendizaje de la integral definida. *Revista Electronica AMIUTEM*, *9*(2), 65–86. https://revista.amiutem.edu.mx/relecamiutem

Riego Gaona, M. A. (2013). Factores Académicos que Explican la Reprobación en Cálculo Diferencial. *Conciencia Tecnológica*, *46*.

Rivas, P. (2005). La educación matemática como factor de deserción escolar y exclusión social. *Educere*.

Rivera Castellón, R. E. (2018). Perfiles de estudiantes asociados a las características de reprobación de las asignaturas de ciencias básicas en ingeniería. *Boletin virtual*, *7*(8).

Rojas-Celis, C. y Cely-Rojas, V. (2020). Propuesta de enseñanza en Cálculo Vectorial: un acercamiento a la clase invertida. *Revista Científica*, *1*(37), 58–66. https://doi.org/10.14483/23448350.15064

Rojas, L. C. y Esteban, P. V. (2012). Geogebra Y Applets Aplicados a La Enseñanza Y Aprendizaje Del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Matematica Educativa*.

Romero Ariza, M. y Quesada, A. (2014). Nuevas tecnologías y aprendizaje significativo de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, *32*(1), 101–115. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.433

Rubio-Pizzorno, S. (2020). Impulsando la Educación Abierta en Latinoamérica desde la Comunidad GeoGebra Latinoamericana. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo. ISSN 2237-9657*, *9*(1), 10–25. https://doi.org/10.23925/2237-9657.2020.v9i1p10-25

Ruiz, J., Rodríguez, H., De León, M. del C. y Espino, C. (2019). Enseñanza del cálculo vectorial a través del software libre GeoGebra. *Revista Electronica AMIUTEM.*, *7*(2), 37–47. http:/revista.amiutem.edu.mx/

Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa TT - Towards a new paradigm in teaching calculus at an educational institution. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*.

Semenov, A. (2005). Las tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza. En *Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura*. http://repositorio.minedu.gob.pe/handle/20.500.12799/3666

Tamam, B. y Dasari, D. (2021). The use of Geogebra software in teaching mathematics. *Journal of Physics: Conference Series*. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1882/1/012042

Tejada Fernández, J. (1999). Acerca de las competencias profesionales. *Revista Herramientas*.

Trejo Trejo, E., Camarena Gallardo, P. y Trejo Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero : la matemática en contexto como propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria*, *11*, 397–424.

Villacreses Veliz, E. G., Lucio Pillasagua, A. del J. y Romero Yela, C. H. (2017). Los recursos didácticos y el aprendizaje significativo en los estudiantes de bachillerato. *Revista Científica Sinapsis*, *2*(9). https://doi.org/10.37117/s.v2i9.94

Villagrán-Cáceres, W. J., Cruz-Siguenza, E. L., Barahona-Avecilla, F. R., Barrera-Cárdenas, O. B. y Insuasti-Castelo, R. M. (2018). Utilización de GEOGEBRA como herramienta metodológica en la enseñanza de la Geometría Analítica y su incidencia en el control del rendimiento académico de estudiantes del primer semestre de ingeniería. *Dominio de las Ciencias*, *4*(4), 128. https://doi.org/10.23857/dc.v4i4.827

Villamizar, L., Montenegro, W. y Salvador, J. (2012). Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, *35*, 254–287. http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/361

Wassie, Y. A. y Zergaw, G. A. (2018). Capabilities and Contributions of the Dynamic Math Software, GeoGebra---A Review. *North American GeoGebra Journal*.

Wassie, Y. A. y Zergaw, G. A. (2019). Some of the potential affordances, challenges and limitations of using GeoGebra in mathematics education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *15*(8). https://doi.org/10.29333/ejmste/108436

Weinhandl, R., Lavicza, Z., Hohenwarter, M. y Schallert, S. (2020). Enhancing flipped mathematics education by utilising GeoGebra. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*. https://doi.org/10.46328/IJEMST.V8I1.832

Wilson, B. G. (1996). *Constructivist Learning Environments: Case Studies in Instructional Design*. Educational Technology Publications. https://books.google.com.mx/books?id=mpsHa5f712wC

Zulnaidi, H., Oktavika, E. y Hidayat, R. (2020). Effect of use of GeoGebra on achievement of high school mathematics students. *Education and Information Technologies*. https://doi.org/10.1007/s10639-019-09899-y

11. ANEXOS

11.1 SECUENCIA DIDÁCTICA

Se plantea una secuencia didáctica para el caso de estudio de las Integrales Dobles y su conceptualización utilizando el software graficador de GeoGebra.

Se planea para realizarse en un centro de cómputo para caso presencial y/o trabajo remoto con los estudiantes utilizando su propio equipo de cómputo.

Los requerimientos previos a tomar las sesiones son la instalación del software GeoGebra Clásico versión 5, o alternativamente utilizar la versión web. Será necesario contar con una plataforma de aula virtual (Moodle) en donde puedan entregarse los ejercicios de clase, ejemplos y tareas.

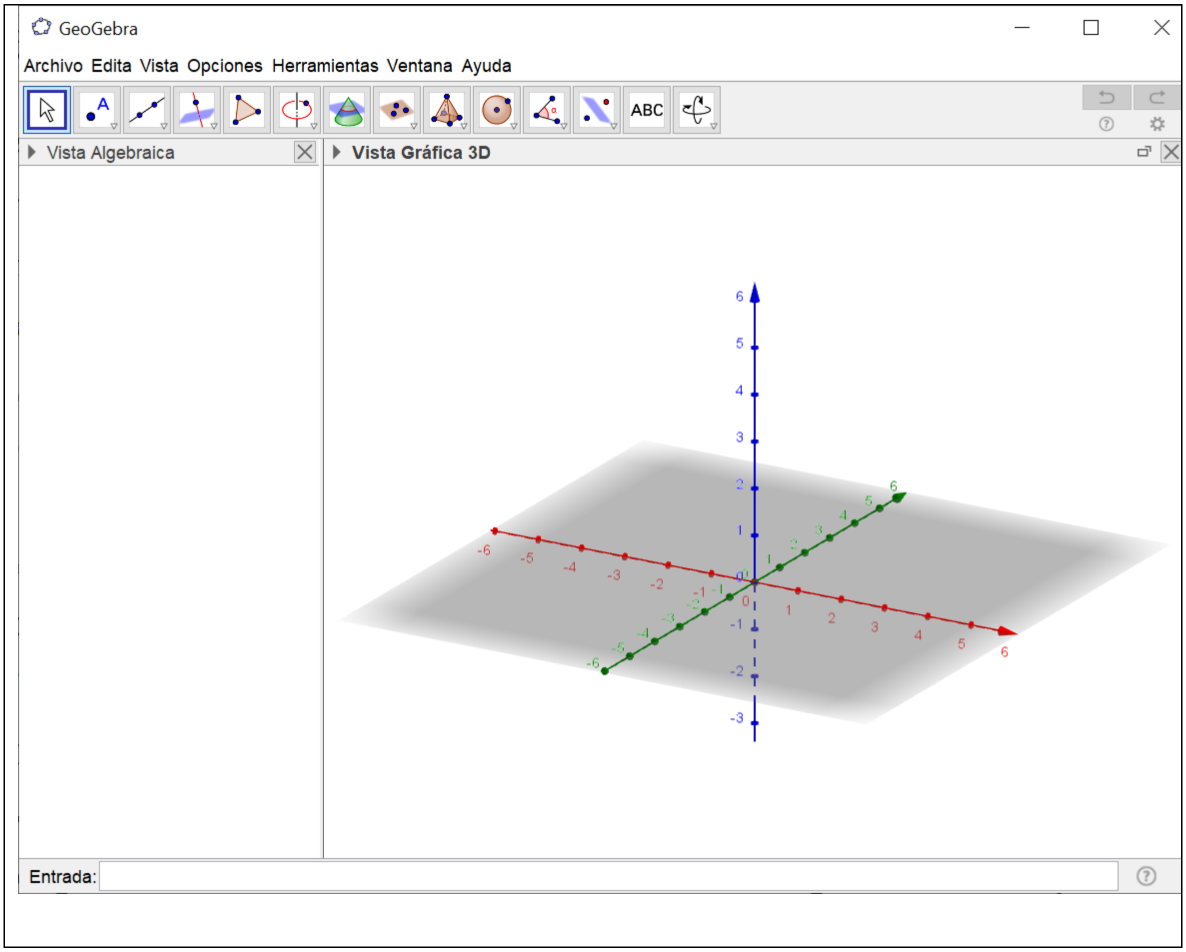
Se plantea una duración de 9 horas totales, divididas en 6 sesiones de 90 minutos. Cada sesión se encuentra descrita en las siguientes páginas.

Sesión 1

Tema	Introduciendo el uso del software GeoGebra Calculadora Gráfica
Docente	Aranzazu Nieblas Aguilar
Fecha	
Tiempo	90 minutos

Aprendizaje esperado	Se espera que el estudiante identifique las partes principales del software GeoGebra Calculadora Gráfica, los cuales son: • Barra de Entrada: Espacio para introducir los comandos y la matemática que deseamos sea representada de forma gráfica. • Vista Algebraica: Permite ver la representación algebraica de los objetos matemáticos (coordenadas, puntos, ecuaciones, etc). • Vista Gráfica 2D: Permite ver la representación gráfica de objetos matemáticos en 2 dimensiones (ecuaciones de 2 variables) y cambiarlos dinámicamente. • Vista Gráfica 3D: Permite ver la representación gráfica de objetos matemáticos en 3 dimensiones (ecuaciones de 3 variables) y cambiarlos dinámicamente.

Secuencia didáctica	Inicio
	Los estudiantes hacen uso de una computadora para acceder al software GeoGebra ¿Alguna vez usaron GeoGebra?; ¿Para qué se utiliza dicho software?
	Desarrollo
	Los alumnos exploran el software de forma libre. El docente explica la interfaz del software. Los estudiantes siguen las instrucciones utilizando las herramientas. Se realizan ejemplos de los objetos matemáticos básicos: coordenadas, punto, vector, ecuación, función, curva.
	Cierre
	Los estudiantes responden algunas preguntas: ¿Qué vistas presenta GeoGebra? ¿Qué se puede realizar en cada vista?

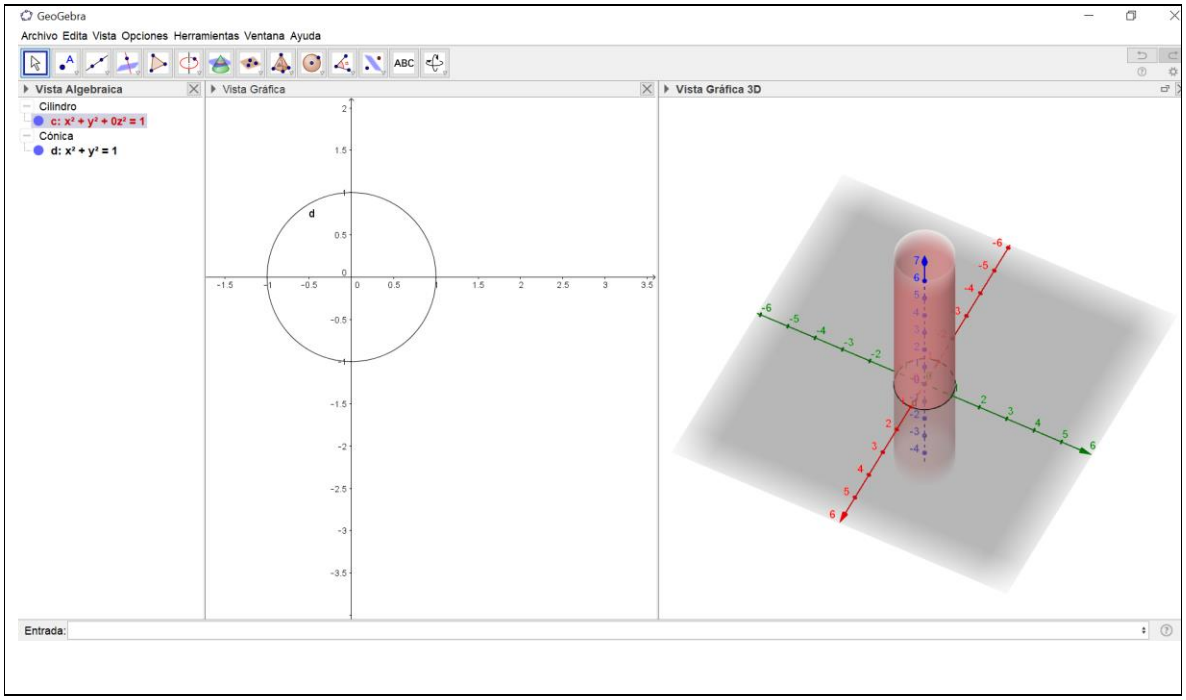

GeoGebra
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
ABC
Vista Algebraica
Vista Gráfica 3D
Entrada:

Sesión 2

Tema	Construcción de superficies en GeoGebra Calculadora Grafica
Docente	Aranzazu Nieblas Aguilar
Fecha	
Tiempo	90 minutos

Aprendizaje esperado	Se espera que el estudiante practique la construcción de superficies introduciendo en la barra de entrada ecuaciones de dos variables, y relacione la vista grafica 2D con la ecuación representada. De forma similar en la barra de entrada introduzca ecuaciones de dos variables y relaciones la vista grafica 3D.

Secuencia didáctica	Inicio
	Recordarán las ecuaciones de dos variables, se repasará las curvas que puede graficarse en dos dimensiones y de forma similar como se representaría una superficie.
	Desarrollo
	El estudiante realizará ejemplos de ecuaciones de dos variables, ya establecidos en el libro de texto y relacionará la representación en ambas vistas graficas de 2D y 3D. Un mínimo de 7 ejemplos de superficies. Incluir una ecuación de tres variables para ejemplificar la superficie resultante.
	Cierre
	Los estudiantes responden algunas preguntas: ¿Cuál es la relación entre las ecuaciones de dos variables representadas en dos y tres dimensiones en GeoGebra? ¿Qué puedo entender de la curva en la vista gráfica de dos dimensiones?

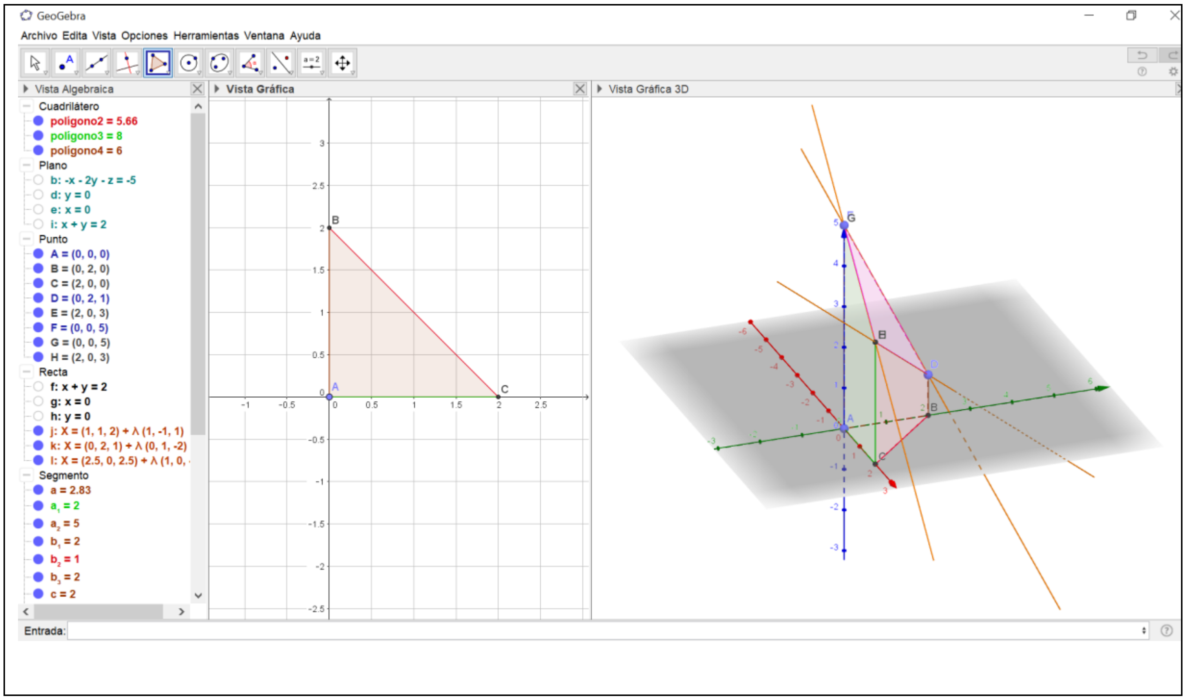

GeoGebra
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Vista Algebraica
Cilindro
c: x² + y² + 0z² = 1
Cónica
d: x² + y² = 1
Vista Gráfica
Vista Gráfica 3D
Entrada:

Sesión 3

Tema	Concepto de región de integración en GeoGebra Calculadora Grafica
Docente	Aranzazu Nieblas Aguilar
Fecha	
Tiempo	90 minutos

Aprendizaje esperado	Se espera que el estudiante practique la construcción de las regiones de integración y pueda establecer la relación con la suma de Riemann.

Secuencia didáctica	Inicio
	Recordarán el concepto de región de integración y suma de Riemann.
	Desarrollo
	El estudiante realizará la construcción de una región de integración en la vista grafica de dos dimensiones. Utilizará una cuadrícula en la vista grafica de 2D para relacionar el concepto de las subregiones R_k y la sumatoria de Riemann. Construirá la función a integrar en la vista grafica 3D, utilizando polígonos representará el volumen que representa una integral doble en la región.
	Cierre
	Los estudiantes responden algunas preguntas: ¿El volumen se puede representar por una integral doble? ¿La suma de Riemann utiliza subregiones, cuál es su uso en la integración? 5 ejercicios de suma de Riemann para hacer propio el conocimiento y las relaciones de conceptos entre superficies, integrales dobles y volumen. (entregable en archivo GeoGebra)

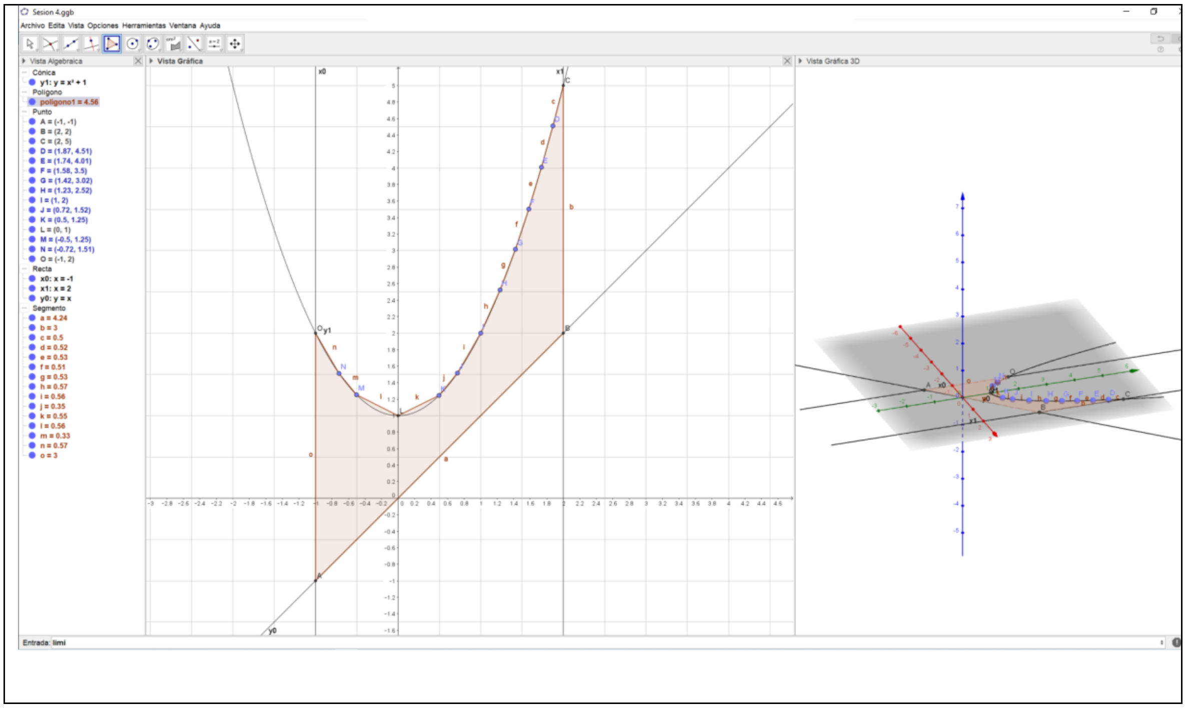

GeoGebra
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Vista Gráfica 3D
Cuadrilátero
polígono2 = 5.66
polígono3 = 8
polígono4 = 6
Plano
b: -x - 2y - z = -5
d: y = 0
e: x = 0
i: x + y = 2
Punto
A = (0, 0, 0)
B = (0, 2, 0)
C = (2, 0, 0)
D = (0, 2, 1)
E = (2, 0, 3)
F = (0, 0, 5)
G = (0, 0, 5)
H = (2, 0, 3)
Recta
f: x + y = 2
g: x = 0
h: y = 0
j: X = (1, 1, 2) + λ (1, -1, 1)
k: X = (0, 2, 1) + λ (0, 1, -2)
l: X = (2.5, 0, 2.5) + λ (1, 0,
Segmento
a = 2.83
a₁ = 2
a₂ = 5
b₁ = 2
b₂ = 1
b₃ = 2
c = 2
Entrada:

Sesión 4

Tema	Concepto de Integral Doble: Regiones y Tipos
Docente	Aranzazu Nieblas Aguilar
Fecha	
Tiempo	90 minutos

Aprendizaje esperado	Se espera que el estudiante practique la construcción de las regiones de integración y pueda establecer el tipo de región.

Secuencia didáctica	Inicio
	Repasar el concepto de integral iterada.
	Desarrollo
	El estudiante realizará la construcción de una región de integración en la vista grafica de dos dimensiones. Utilizará una cuadricula en la vista grafica de 2D para ilustrar la región que se delimita por dos funciones frontera en un intervalo. Entender el concepto y diferencia entre la región tipo I y II.
	Cierre
	Los estudiantes responden algunas preguntas: ¿Cuál es la diferencia entre regiones tipo I y tipo II? ¿Cuál es el orden de integración del tipo I? ¿Cuál es el orden de integración del tipo II? 5 ejercicios de graficar las regiones de integración e identificar el tipo de región. (entregable en archivo GeoGebra)

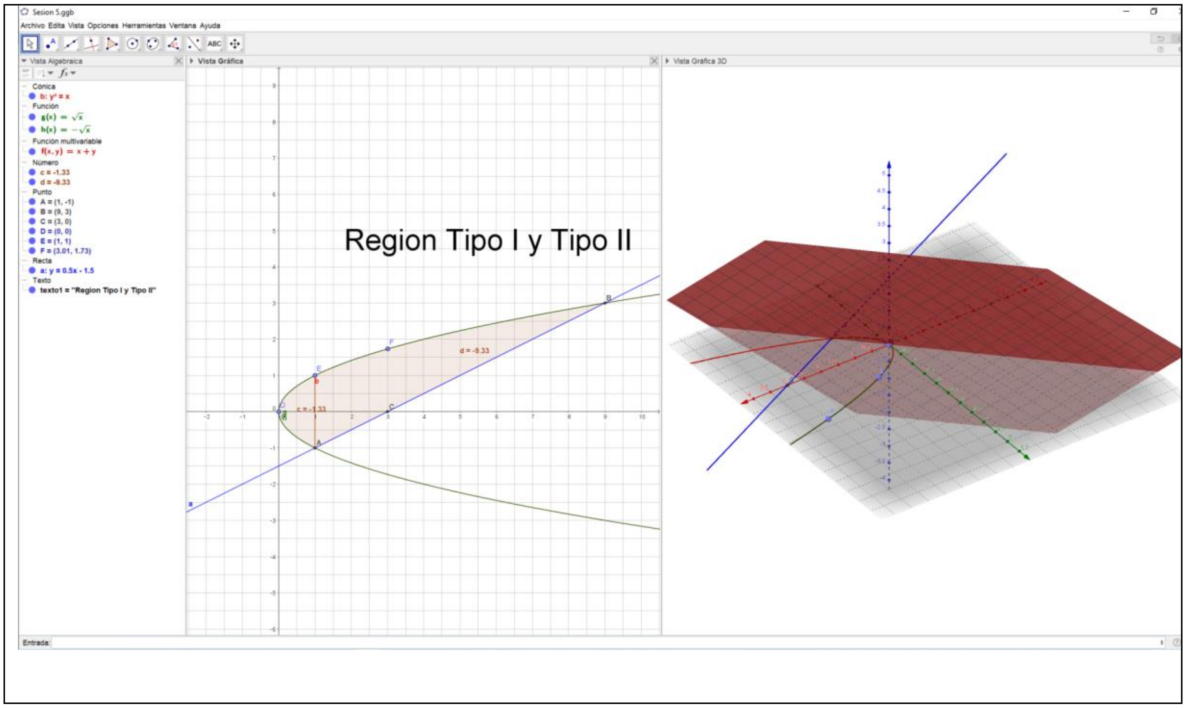


Sesión 5

Tema	Concepto de Integral Doble: Límites de integración y evaluación de la integral
Docente	Aranzazu Nieblas Aguilar
Fecha	
Tiempo	90 minutos

Aprendizaje esperado	Se espera que el estudiante defina los límites de integración a partir de identificar el tipo de región. Y evalué la integral en el orden posible y si es de ambos tipos identifiqué el más sencillo de integrar.

Secuencia didáctica	Inicio
	Repasar el teorema de Fubini
	Desarrollo
	El estudiante realizará la construcción de una región de integración en la vista grafica de dos dimensiones. Identificará el tipo de región tipo I, tipo II o de ambos; utilizando GeoGebra en ambas vistas graficas 2D y 3D. Si es de ambos tipos la región, identificará el orden de integración conveniente. Encontrará los límites y orden de integración, para evaluar la integral.
	Cierre
	Los estudiantes responden algunas preguntas: ¿Es posible hacer integrales dobles en cualquier orden de integración? ¿Si tienes una región de ambos tipos como decides cuál es el mejor orden de integración? ¿Si cometiste error en elegir el orden de integración, que sucederá? 5 ejercicios de graficar las regiones de integración e identificar el tipo de región. (entregable en archivo GeoGebra) y evaluar la integral doble sobre la región acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas.


Sesion 5.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Vista Gráfica 3D
Cónica
b: y² = x
Función
g(x) = √x
h(x) = −√x
Función multivariable
f(x, y) = x + y
Número
c = -1.33
d = -9.33
Punto
A = (1, -1)
B = (9, 3)
C = (3, 0)
D = (0, 0)
E = (1, 1)
F = (3.01, 1.73)
Recta
a: y = 0.5x - 1.5
Texto
texto1 = "Region Tipo I y Tipo II"
Region Tipo I y Tipo II
d = -9.33
c = -1.33
Entrada:

Sesión 6

Tema	Interpretación de regiones y formulación de la solución con Integral Doble
Docente	Aranzazu Nieblas Aguilar
Fecha	
Tiempo	90 minutos

Aprendizaje esperado	Se espera que el estudiante defina los límites de integración a partir de identificar el tipo de región. Y evalué la integral en el orden posible y si es de ambos tipos identifiqué el más sencillo de integrar.

<table>
<tr><td rowspan="6">Secuencia didáctica</td><td>Inicio</td></tr>
<tr><td>Repasar la inversión del orden de integración.</td></tr>
<tr><td>Desarrollo</td></tr>
<tr><td>El estudiante realizará la construcción de una región definida de los ejercicios del libro de texto, en la vista grafica de 2D.

Identificará si la integral doble se debe realizar en una región o es necesario separarla en una unión de regiones.

Identificará el tipo de región o regiones (unión), para definir los límites de integración.

Evaluar la integral doble formulada.

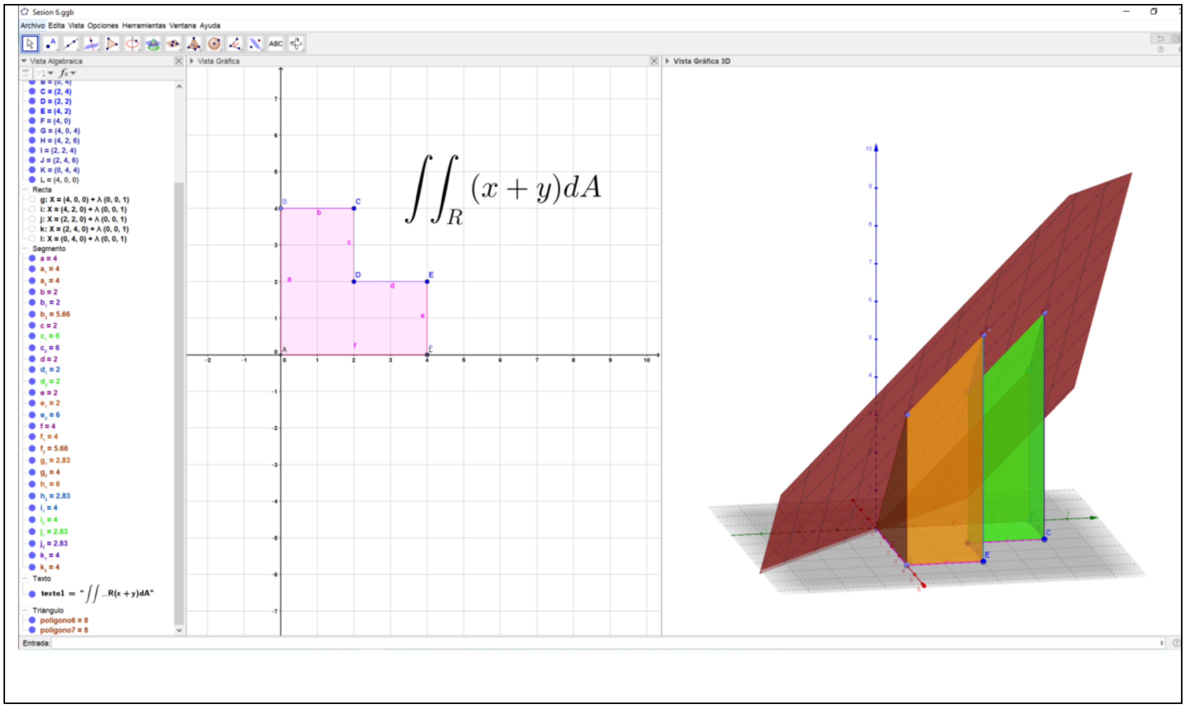
Practicar en ejercicios del libro la inversión del orden de integración para integrales dobles.</td></tr>
<tr><td>Cierre</td></tr>
<tr><td>Los estudiantes responden algunas preguntas:

¿Cuándo es necesario hacer unión de regiones?

¿Qué utilidad tiene la inversión del orden de integración?

¿Afecta al resultado el orden de integración?

5 ejercicios de evaluar la integral doble sobre la una región e invertir el orden de integración (si es posible).</td></tr>
</table>



Sesion 6.ggb
Archivo Edita Vista Opciones Herramientas Ventana Ayuda
Vista Algebraica
Vista Gráfica
Vista Gráfica 3D
$\int\int_R (x+y)dA$
Entrada: