

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas



Posgrado en Física

Análisis de modelos cosmológicos y de agujeros negros  
con simetría esférica en diversas coordenadas

Tesis

como requisito para obtener el grado de

Maestro en Física

Presentada por:

Lic. Brandon Mariano Martínez Olivas

Directores de Tesis:

Dr. Edgar Alejandro León Espinoza

Dr. Juan Antonio Nieto García

Culiacán Sinaloa, México a 22 de agosto de 2023



Dirección General de Bibliotecas  
Ciudad Universitaria  
Av. de las Américas y Blvd. Universitarios  
C. P. 80010 Culiacán, Sinaloa, México.  
Tel. (667) 713 78 32 y 712 50 57  
dgbuas@uas.edu.mx

## UAS-Dirección General de Bibliotecas

### Repositorio Institucional Buelna

#### Restricciones de uso

Todo el material contenido en la presente tesis está protegido por la Ley Federal de Derechos de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

Queda prohibido la reproducción parcial o total de esta tesis. El uso de imágenes, tablas, gráficas, texto y demás material que sea objeto de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente correctamente mencionando al o los autores del presente estudio empírico. Cualquier uso distinto, como el lucro, reproducción, edición o modificación sin autorización expresa de quienes gozan de la propiedad intelectual, será perseguido y sancionado por el Instituto Nacional de Derechos de Autor.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-No Comercial  
Compartir Igual, 4.0 Internacional



---

# Resumen

En la teoría de la relatividad general empleamos variedades para describir una región del espacio-tiempo. Las ecuaciones de campo de Einstein relacionan la geometría del espacio-tiempo con la materia y radiación presentes, ofreciendo así una descripción novedosa para el origen del campo gravitacional. Las métricas  $g_{\mu\nu}$  que describen cierta región del espacio-tiempo y que cumplen las ecuaciones de campo de Einstein pueden poseer singularidades, puntos en los que las leyes de la física se comportan de manera no convencional. Un método usual para obtener más información de ellas es aplicar una transformación de coordenadas, esto debido a que un único sistema coordenado no es suficiente para describir toda la variedad ni todas las situaciones dentro de ella. Además, si se elige una transformación conveniente, puede resultar que una singularidad es removida, en cuyo caso la métrica podrá describir una región mayor de espacio-tiempo y permitir un análisis de geodésicas en diferentes coordenadas. Así mismo, la importancia de estas transformaciones recae en que permiten describir cómo se observan los eventos desde el punto de vista de diferentes observadores a diferentes velocidades y en diferentes direcciones.

En este trabajo se analiza un método recientemente desarrollado que transforma métricas conocidas en coordenadas tipo Kruskal. Con este desarrollo, también se obtienen coordenadas conforme planas en secciones de ángulos constantes que no corresponden a las primeras, las cuales son novedosas y no han sido analizadas exhaustivamente en la literatura. Así, se obtiene un enfoque diferente e innovador en el análisis de métricas con simetría esférica, así como sistemas coordenados novedosos.

---

# Dedicatoria

Dedicado a mi familia y a todas las personas que con su buena voluntad me han acompañado en mi proceso de formación académica, profesional, y personal.

---

# Agradecimientos

A mi padre y madre, Mariano Martínez Borquez y Margarita Olivas Hernández, por el apoyo incondicional que me han brindado para seguir adelante durante toda mi vida.

A mi esposa, María Guadalupe Rivera Meza, a quien amo tanto y agradezco por tenerme tanta paciencia, estar a mi lado en todo momento y por darme su amor todos los días, lo que me motiva a cumplir todo lo que me proponga.

Al Dr. Edgar Alejandro León Espinoza por todo el conocimiento y los consejos que me brindó como profesor y como amigo.

Al Dr. Juan Antonio Nieto García por compartir conmigo su conocimiento y su vasta experiencia en el mundo científico.

Al Lic. Andrés Sandoval Rodríguez por acompañarme durante los 7 años de mi formación académica y apoyarme en todo lo que estuviera a su alcance.

A la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas (FCFM) por la formación académica que me brindó. En particular a Dr. Raúl Enrique Félix Medina, Dr. Cristo Manuel Yee Rendón, Dr. Roger José Hernández Pinto y Dr. Gelacio Atondo Rubio, con quienes considero que se ha creado una amistad valiosa.

Al consejo nacional de humanidades, ciencia y tecnología (CONAHCYT), el cual me brindó ayuda monetaria mediante la beca nacional (CVU 1088691) y me permitió realizar este trabajo.

# Índice de figuras

2.1. Geometría de las transformaciones de Lorentz . . . . .	8
3.1. Conos de luz y estructura causal del espacio-tiempo de Minkowski. . .	16
3.2. Gráfica de $\Delta(r)$ como función de $r$ , donde $\Delta(r) = 1 - 2M/r + Q^2/r^2$ (Reissner-Nordström). . . . .	20
4.1. Comportamiento de los conos de luz en la métrica de Schwarzschild. . .	28
4.2. Comportamiento de los conos de luz considerando la coordenada de tortoise para la métrica de Schwarzschild. . . . .	29
4.3. Diagrama de Kruskal-Szekeres para la métrica de Schwarzschild . . . .	33
5.1. Diagrama de Penrose-Carter para la métrica de Schwarzschild . . . . .	44
6.1. Diagrama de elipses de las coordenadas pulsantes $(\rho, T)$ como fun- ción del tiempo y a $r$ fijo. . . . .	58
6.2. Comportamiento de la coordenada de tortoise para la métrica de Sch- warzschild $r_{Sch}^*$ . . . . .	61
6.3. Relación entre la coordenada radial $r$ y la coordenada de Regge- Wheeler para la métrica de Schwarzschild. . . . .	61
6.4. Carácter oscilatorio de los semiejes de las elipses $\rho$ - $T$ dado por la función $\frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega r_{Sch}^*)$ . . . . .	62
6.5. Diagrama de elipses de las coordenadas pulsantes $(\rho, T)$ como fun- ción de $r$ para la métrica de Schwarzschild. . . . .	62
6.6. Comportamiento de la coordenada de tortoise para la métrica de de- Sitter $r_{dS}^* = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \tanh^{-1}(\sqrt{\Gamma}r)$ . . . . .	64
6.7. Carácter oscilatorio de los semiejes de las elipses $\rho$ - $T$ dado por la función $\frac{1}{\omega} \text{sen}\left(\frac{\omega}{\sqrt{\Gamma}} \tanh^{-1}(\sqrt{\Gamma}r)\right)$ . . . . .	64

6.8. Diagrama de elipses de las coordenadas pulsantes $(\rho, T)$ como función de $r$ para la métrica de de-Sitter. . . . .	65
6.9. Comportamiento de la coordenada de tortoise para la métrica de Anti-de-Sitter $r_{AdS}^* = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \tan^{-1}(\sqrt{\Gamma}r)$ . . . . .	67
6.10. Carácter oscilatorio de los semiejes de las elipses $\rho$ - $T$ dado por la función $\text{sen}(\omega r_{AdS}^*)$ . . . . .	67
6.11. Diagrama de elipses de las coordenadas pulsantes $(\rho, T)$ como función de $r$ para la métrica de Anti-de-Sitter. . . . .	68
6.12. Comportamiento de la coordenada de tortoise para la métrica de Reissner-Nordström . . . . .	70
6.13. Comportamiento de la coordenada de tortoise para la métrica de Schwarzschild-de-Sitter . . . . .	73
6.14. Extensión parcial de la métrica de Schwarzschild generado por la ecuación (6.106). . . . .	78
6.15. Diagrama de las coordenadas pseudo-Kruskal para la métrica de Schwarzschild . . . . .	83

---

# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>II</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>IV</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Espacio-tiempo y geometría</b>	<b>7</b>
2.1. Relatividad especial . . . . .	7
2.2. Relatividad general . . . . .	9
2.3. Análisis vectorial y tensorial en relatividad . . . . .	10
<b>3. Soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein</b>	<b>15</b>
3.1. Métrica de Schwarzschild . . . . .	16
3.2. Métrica de de-Sitter . . . . .	17
3.3. Métrica de Schwarzschild-de-Sitter . . . . .	18
3.4. Agujeros negros con carga eléctrica: Reissner-Nordström . . . . .	19
3.5. Modelos cosmológicos: Métrica de Friedmann . . . . .	20
<b>4. Coordenadas de Kruskal para la métrica de Schwarzschild</b>	<b>27</b>
4.1. Hacia las coordenadas de tortoise y Eddington-Finkelstein . . . . .	27
4.2. La solución maximalmente simétrica de Schwarzschild . . . . .	30
<b>5. Transformaciones y coordenadas conformes</b>	<b>35</b>
5.1. Coordenadas isotrópicas para la métrica de Schwarzschild . . . . .	37



---

5.2. Diagramas de Penrose-Carter . . . . .	42
<b>6. Coordenadas alternativas para métricas con simetría esférica</b>	<b>45</b>
6.1. Coordenadas conforme planas para métricas con simetría esférica . .	45
6.2. Coordenadas pulsantes . . . . .	53
6.2.1. Métrica de Schwarzschild . . . . .	58
6.2.2. Espacio de de-Sitter . . . . .	63
6.2.3. Espacio de Anti-de-Sitter compactificado . . . . .	66
6.2.4. Agujero negro cargado . . . . .	68
6.2.5. Un caso especial: Schwarzschild-de-Sitter . . . . .	70
6.3. Coordenadas de Regge-Wheeler . . . . .	72
6.4. Coordenadas conformes tipo Kruskal . . . . .	76
<b>7. Conclusiones</b>	<b>84</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>86</b>

---

# Capítulo 1

## Introducción

En 1915, Albert Einstein publica la teoría de la relatividad general, la cual logra codificar la interacción gravitacional en la geometría del espacio-tiempo [1]. Las ecuaciones de campo de Einstein son una renovación de la ley de gravitación universal de Newton y tienen la siguiente forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.1)$$

En el capítulo 2 se describen las cantidades que aparecen en esta ecuación. Dichas ecuaciones admiten diversas soluciones analíticas, la primera de ellas fue la métrica de Schwarzschild, la cual describe el potencial gravitacional en el exterior vacío de un objeto simétricamente esférico sin carga ni momento angular [2]. Esta es una de las soluciones más interesantes de las ecuaciones de campo de Einstein, ya que puede describir la región exterior de un planeta, una estrella o un agujero negro. En orden cronológico, la segunda solución fue la métrica de de-Sitter, la cual describe un universo maximalmente simétrico en expansión acelerada y con constante cosmológica positiva [3]. La métrica denominada por el nombre de los autores Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, a veces abreviada como FLRW, describe un universo isotrópico y homogéneo en expansión. De hecho, la métrica de de-Sitter puede verse como un caso especial de esta [4]. Así mismo, existen métricas más generales que la de Schwarzschild, como la que recibe el nombre de Kerr-Newman,

la cual describe el campo gravitacional debido a un objeto masivo con carga eléctrica y momento angular [5].

El principio de equivalencia es una de las ideas principales sobre las cuales se construye la teoría de relatividad. Este establece que las leyes de la física son independientes del estado de movimiento del observador, lo cual se interpreta como que las leyes de la física deben de escribirse en forma covariante, es decir, que sean independientes del sistema coordenado que se emplee [6]. Las ecuaciones de campo de Einstein están escritas de esta manera y son exitosas al describir fenómenos a escalas de nuestro sistema solar.

Con la introducción de esta teoría, se empieza a modelar el espacio-tiempo como una variedad, cuya geometría está contenida en el tensor métrico  $\mathbf{g}$  asociado a ella. Este es un objeto geométrico caracterizado por el siguiente mapeo:

$$\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{v}) = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu, \quad (1.2)$$

donde  $g_{\mu\nu}$  son las componentes de  $\mathbf{g}$  en un sistema coordenado dado. Este tensor recopila la geometría de dicho espacio para describir cómo la materia y energía deforman la geometría del espacio-tiempo y tiene un papel importante en cómo se define una distancia en la variedad. Cuando las entradas de este tensor son iguales a  $d\vec{r}$ , donde  $\vec{r}$  es el vector de posición tetradimensional, tendremos lo que define a la métrica  $ds^2$  [7],

$$\mathbf{g}(d\vec{r}, d\vec{r}) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (1.3)$$

Existe evidencia experimental que respalda esta teoría: La deflexión de la luz, en donde un cuerpo masivo modifica la trayectoria de la luz emitida por un cuerpo celeste, el cual podría ser una estrella lejana [8]. Como consecuencia de esto, la posición de dicho cuerpo que es medida por los humanos en la Tierra será incorrecta. Otro fenómeno predicho por esta teoría y comprobado es la precesión del perihelio de Mercurio, cuyas mediciones revelan que no se comporta como lo predice la teoría clásica de Newton, pues discrepa en una cantidad angular de 43 segundos por

siglo [9]. Este ajuste sí es consistente con la teoría de la relatividad general. Una evidencia más actual es la reciente detección de ondas gravitacionales en 2015, las cuales son una de las predicciones más interesantes de esta teoría geométrica de gravedad [10]. Estas ondas son producidas por una masa acelerada, análogo a lo que ocurre en el área de electrodinámica, en la cual una carga eléctrica acelerada produce ondas electromagnéticas.

Recientemente, la exploración cósmica ha alcanzado un logro sin precedentes que despierta la admiración de la comunidad científica y el público en general. Gracias a la colaboración del Telescopio del Horizonte de Sucesos (The Event Horizon Telescope Collaboration), se ha llevado a cabo una hazaña de observación que redefine nuestra comprensión de los objetos más enigmáticos y poderosos del universo: los agujeros negros. La visión tradicional de un agujero negro como un abismo oscuro e impenetrable ha sido trascendida por las imágenes captadas por este telescopio internacional. Mediante una red global de telescopios interconectados, el Event Horizon Telescope ha logrado capturar la elusiva silueta del horizonte de sucesos, la frontera donde la gravedad es tan intensa que ni la luz puede escapar, en el núcleo de la galaxia Messier 87 [11]. Esta proeza tecnológica y científica no solo valida la teoría general de la relatividad de Einstein en condiciones extremas, sino que también desencadena nuevas preguntas y exploraciones. Las imágenes detalladas del agujero negro en Messier 87 proporcionan una oportunidad única para comprender las propiedades fundamentales de estos enigmáticos objetos, como su rotación y las interacciones con su entorno circundante. Este hito en la investigación astronómica nos recuerda que, a pesar de los enigmas persistentes y los desafíos teóricos en la física, el poder de la colaboración internacional y la innovación tecnológica puede abrir ventanas a realidades antes inaccesibles. A medida que continuamos desentrañando los misterios del cosmos, la observación del horizonte de sucesos nos invita a contemplar la maravilla y la complejidad de nuestro universo en constante evolución.

A pesar de dicha evidencia experimental, existen fenómenos que no pueden ser descritos por esta teoría. Como consecuencia de ello, existen problemas abiertos

en el área de física teórica. Por ejemplo, existen teorías alternativas que proponen la existencia de materia y energía oscuras para describir el movimiento de galaxias [12, 13]. Otro problema abierto es la tensión de Hubble, el cual consiste en una discrepancia entre el valor de la constante de Hubble obtenido mediante métodos diferentes [14]. Por otro lado, tenemos la ausencia de una teoría de gravedad cuántica [15]. Esto es debido a que la relatividad general es una teoría clásica y no funciona a escalas microscópicas como lo hace la mecánica cuántica. La teoría de cuerdas y la teoría cuántica de lazos son dos enfoques destacados en la búsqueda por unificar la relatividad general con el mundo cuántico [16, 17].

A pesar de la robusta base experimental que respalda esta teoría, emergen fenómenos que desafían su capacidad explicativa. Estos misterios persisten como desafíos fascinantes en el ámbito de la física teórica. Por ejemplo, surgen enigmas intrigantes que trascienden los alcances de esta teoría ampliamente aceptada. Entre estos enigmas se encuentran la naturaleza elusiva de la materia y la energía oscuras, las cuales se han postulado como fuentes potenciales para explicar el comportamiento de las galaxias en movimiento [12, 13]. Uno de los pioneros en este campo, Fritz Zwicky, realizó investigaciones pioneras que involucraron observaciones detalladas de la velocidad de galaxias en cúmulos galácticos. Este trabajo seminal allanó el camino para la comprensión de fenómenos cósmicos a gran escala, poniendo de manifiesto la existencia de una materia invisible pero gravitacionalmente influyente, ahora conocida como "materia oscura". Vera Rubin, en la década de 1970, complementó este entendimiento con sus investigaciones sobre las curvas de rotación de las galaxias, revelando pruebas adicionales de la presencia de materia oscura en las regiones exteriores de las galaxias. Sin embargo, la narrativa cósmica aún se encuentra enmarcada por preguntas no resueltas. Un ejemplo es la tensión de Hubble, que señala una desconcertante discrepancia entre los valores de la constante de Hubble obtenidos a través de distintos métodos observacionales. Actualmente, este valor se encuentra en debate, con mediciones obtenidas a partir del fondo cósmico de microondas que sugieren un ritmo de expansión más rápido del universo

en comparación con las estimaciones derivadas de observaciones de galaxias distantes [14]. Un desafío aún más formidable reside en la ausencia de una teoría de gravedad cuántica, una frontera donde la relatividad general y la mecánica cuántica colisionan. La relatividad general de Einstein ha probado ser efectiva en describir la gravedad a escalas cósmicas, mientras que la mecánica cuántica gobierna el mundo subatómico. La reconciliación de estas dos perspectivas en una única teoría coherente ha sido escurridiza. Dos enfoques prominentes en esta búsqueda son la teoría de cuerdas y la teoría cuántica de bucles, ambas aspirando a unificar la gravedad con las leyes cuánticas fundamentales [16, 17]. Así, el vasto territorio de la física teórica está adornado con maravillas y misterios igualmente cautivadores. Aunque las teorías existentes han demostrado su valía, el telón se alza ante desafíos que continúan estimulando la imaginación y el intelecto, impulsándonos a explorar las profundidades insondables del universo y las leyes que lo rigen.

El tensor métrico (1.2) con el que describimos el espacio-tiempo es uno de los cimientos sobre los cuales se construyen diversas teorías [6]. Debido a esto, es importante trabajar con métricas que nos den la mayor información posible de la región del universo que describen y ayuden a entender mejor los fenómenos presentes en él. En este trabajo, se analiza un método reciente que transforma métricas con simetría esférica en una forma conforme plana cuando se consideran secciones de ángulos constantes, de manera que se trabaje con una métrica bidimensional [7, 18]. En esta forma conforme plana se puede obtener más información de la región en cuestión, además de que podemos analizar las simetrías y describir una región mayor que la original, o describir una región más compacta. Las coordenadas de Kruskal-Szekeres y las coordenadas conformes son ejemplos modelo en llevar a cabo esta tarea.

La estructura de este trabajo es la siguiente: En el capítulo actual se dio una motivación para esta tesis, pues relatividad general es un cimiento muy importante en la búsqueda del entendimiento del universo. En el capítulo 2 se realiza un repaso de dicha teoría, enfatizando en conceptos y herramientas que serán indispensables

en el resto de este trabajo. En el capítulo 3 se mencionan y describen brevemente diversas métricas que serán utilizadas en capítulos posteriores, haciendo énfasis en el modelo cosmológico de Friedmann y analizando bajo qué condiciones se puede obtener un sistema coordenado estático para un universo en expansión. Así mismo, se introducen las métricas de Schwarzschild con y sin carga eléctrica, pues estas poseen simetría esférica y serán objeto de aplicación de los resultados obtenidos en capítulos posteriores. En el capítulo 4 se trabaja con las coordenadas de Kruskal-Szekeres para la métrica de Schwarzschild, pues son un ejemplo ilustrativo de lo que una transformación de coordenadas puede lograr. En el capítulo 5 se describe un tipo especial de transformaciones que dirigen hacia las llamadas coordenadas conformes. Estas son de especial interés en esta tesis, pues en el capítulo 6 se trabaja con una transformación de coordenadas que convierte una métrica estática con simetría esférica y con cierta estructura en una forma conforme plana cuando se consideran rebanadas de espacio-tiempo a ángulos constantes. Como resultado, se obtienen sistemas coordenados que son novedosos y que pueden reducirse a casos conocidos, por lo que estos son más generales.

En este trabajo se considera  $c = 1$  para la velocidad de la luz y  $G = 1$  para la constante de gravitación universal. De esta manera, el radio de Schwarzschild, cuya expresión completa es  $r_s = 2GM/c^2$ , se escribirá como  $r_s = 2M$ . Además, se emplea la convención de suma de índice repetido de cálculo tensorial y se considera la signatura  $(-+++)$ .

---

## Capítulo 2

# Espacio-tiempo y geometría

En este capítulo se presentan de manera breve los fundamentos sobre los que se sostiene esta tesis: Relatividad especial y general, así como el formalismo matemático de la geometría diferencial y cálculo tensorial.

### 2.1. Relatividad especial

En relatividad especial, el espacio-tiempo puede considerarse como un continuo tetradimensional compuesto de eventos, los cuales son puntos del espacio a un tiempo determinado. Este es dotado de una estructura causal, entendida en física no relativista como que para un evento determinado, todos los demás eventos en el espacio-tiempo estarán en el futuro de él o en el pasado de él. En relatividad especial no existe el concepto de simultaneidad absoluta, pues se introduce el concepto de conos de luz, los cuales determinan la relación de un evento con otros. Decimos que dos de estos están conectados causalmente cuando uno de ellos está en el cono de luz futuro del otro, esto es, uno puede ser consecuencia del otro. Un evento que se encuentra fuera del cono de luz futuro de otro, no puede ser afectado por este, pues se requiere una velocidad mayor que la de la luz para que eso ocurra. Dado un suceso, las coordenadas de este medidas por el observador  $\mathcal{O}$  están relacionadas con las medidas por otro observador  $\mathcal{O}'$ , quien se mueve a una velocidad  $|v|$  en dirección



$\hat{x}$  relativa a  $\mathcal{O}$ , a través de las transformaciones de Lorentz (ver figura 2.1):

$$t' = \frac{t - vx}{(1 - v^2)^{1/2}} \quad (2.1)$$

$$x' = \frac{x - vt}{(1 - v^2)^{1/2}} \quad (2.2)$$

$$y' = y \quad (2.3)$$

$$z' = z. \quad (2.4)$$

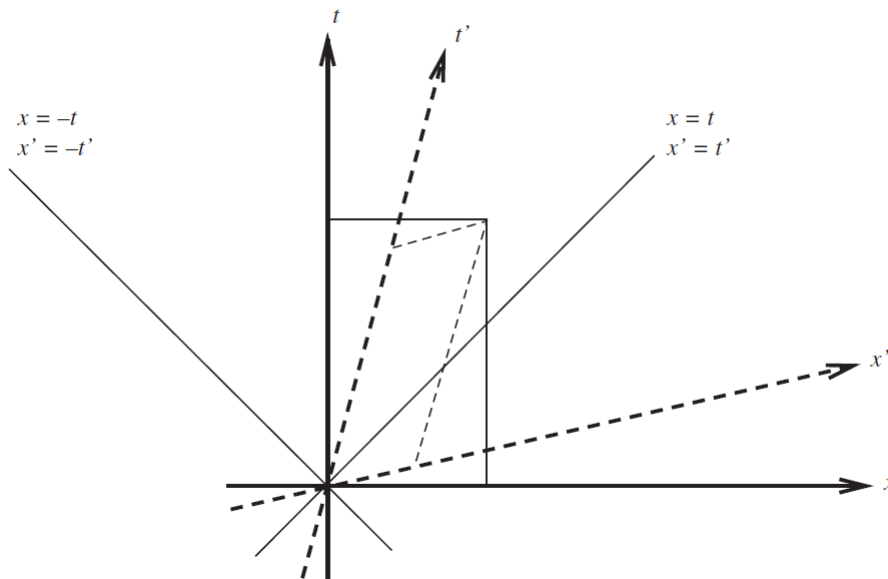


Figura 2.1: A diferencia de una transformación Galileana, el efecto de una transformación de Lorentz en el espacio-tiempo no es una rotación del plano  $x - t$ , sino que los ejes se acercan simétricamente alrededor de la línea  $x = t$ , la cual permanece invariante, pues coincide con la línea  $x' = t'$ .

Además, en relatividad especial, el intervalo de tiempo y el intervalo de espacio entre eventos simultáneos para un observador particular no tienen significado absoluto. La cantidad que es independiente del observador es el intervalo de espacio-tiempo, o elemento de línea, denotado por  $ds^2$  y definido en la siguiente ecuación:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.5)$$

la cual puede ser reescrita en notación tensorial como  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , donde  $\eta_{\mu\nu}$  son las componentes de la métrica de Minkowski, de manera que en relatividad especial la geometría es plana. Así, a pesar de la ausencia de un tiempo absoluto o un marco de referencia inercial preferencial, se postula que la velocidad de la luz en el vacío sí debe ser la misma para todos los observadores inerciales.

## 2.2. Relatividad general

En relatividad general, el campo gravitacional corresponde a una desviación de la geometría plana que se tiene en relatividad especial, de manera que consideramos que el espacio-tiempo posee curvatura por sí mismo. En diversas áreas de la física, las fuerzas de la naturaleza son representadas por campos. Un ejemplo destacado es el campo electromagnético empleado para describir los fenómenos que involucran cargas eléctricas en reposo y en movimiento. A diferencia de esta fuerza, la gravedad es inherente del espacio-tiempo mismo, pues lo que experimentamos como gravedad es una manifestación de la curvatura de este. En la teoría clásica de Newton, la ecuación que se encarga de describir el potencial gravitacional  $\Phi$  debido a la presencia de una densidad de masa  $\rho$  es la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi\rho, \quad (2.6)$$

y la respuesta de la materia, esto es, su aceleración, está descrita por la segunda ley de Newton,

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (2.7)$$

en donde la aceleración está relacionada con el potencial  $\Phi$  a través del gradiente de este:

$$\vec{a} = \nabla\Phi. \quad (2.8)$$

En relatividad general, la ecuación análoga a (2.6) es la ecuación (1.1). Similarmente, la ecuación geodésica,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0, \quad (2.9)$$

es la ecuación análoga a la segunda ley de Newton (2.7). Aquí,  $\lambda$  es llamado parámetro afín. El nombre geodésica se le da a la trayectoria que posea la menor distancia posible entre dos puntos, la cual en espacio-tiempo plano sería una línea recta. Sin embargo, en espacio-tiempo curvo, las geodésicas no son líneas rectas.

### 2.3. Análisis vectorial y tensorial en relatividad

Los cuadvectores que se definen en un espacio-tiempo tetradimensional no pueden pensarse intuitivamente como un objeto geométrico que inicia en un punto y termina en otro, como se hace en geometría Euclídea tridimensional elemental. Bajo la premisa de que un espacio-tiempo curvo se comporta localmente como un espacio vectorial, en el cual podemos sumar sus elementos, calcular su producto escalar o multiplicarlos por un escalar, definimos el espacio tangente  $T_p$  en cada punto  $p$  de la variedad, como un espacio vectorial en el mismo sentido del álgebra lineal, el cual consiste en todos los vectores localizados en dicho punto. Así, definimos el espacio  $\mathcal{F}$  de todas las funciones suaves en la variedad  $M$  (mapeos  $C^\infty$  del tipo  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ). Entonces cada curva que pasa a través del punto  $p$  define un operador en este espacio: La derivada direccional,  $df/d\lambda$ , donde  $\lambda$  es el parámetro a lo largo de la curva parametrizada. Con esto en mano, exponemos la siguiente afirmación: *El espacio tangente  $T_p$  puede ser identificado con el espacio de operador de derivada direccional a lo largo de curvas a través de  $p$ .* Dado este espacio vectorial, podemos definir su dual,  $T_p^*$ , llamado espacio cotangente. Este consiste en todos los mapeos lineales del espacio vectorial original a los números reales. Similarmente, el espacio tangente original consiste en todos los mapeos lineales que van del espacio vectorial dual

hacia los números reales. En ecuaciones esto se resume como

$$V(\omega) = \omega(V) = \omega_\mu V^\mu \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

donde  $V = V^\mu \hat{e}_{(\mu)}$  es un vector y  $\omega = \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)}$  es un vector dual, también llamado uno-forma. En esta notación,  $V^\mu$  y  $\omega_\mu$  denotan las componentes del vector  $V$  y de la uno-forma  $\omega$ , respectivamente. Además,  $\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu$  es una base coordenada para el espacio tangente, mientras que  $\hat{\theta}^{(\mu)} = dx^\mu$  es una base para el espacio cotangente. La colocación de un paréntesis en los índices de estos vectores base es para indicar que estos son una colección de vectores, no componentes de un solo vector. A los elementos de  $T_p$  usualmente se les llama vectores contravariantes y a los elementos de  $T_p^*$  se les llama vectores covariantes, pero en la actualidad estos términos son poco usados. Un ejemplo conocido de uno-forma es el gradiente de una función escalar,

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \hat{\theta}^{(\mu)}. \quad (2.11)$$

Al igual que en geometría Euclídea tridimensional, en donde consideramos un vector  $\vec{A}$  como una colección de tres números  $A^i$  que transforman de igual manera que las coordenadas por sí mismas,  $A^{i'} = \Lambda^{i'}_i A^i$ , es posible considerar un cuadvectores en relatividad especial como una colección de cuatro números que transforman de la manera mencionada. Como un ejemplo de cuadvectores, considérese una trayectoria en el espacio-tiempo,  $x^\mu(\lambda)$ , donde  $\lambda$  es un parámetro. La tangente a esta curva es llamada cuadvirvelocidad, dada por  $U^\mu = dx^\mu/d\lambda$ . Por otro lado, también puede medirse la longitud a lo largo de esta curva,  $\Delta l$ , cuya expresión es

$$\Delta l = \int \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda, \quad (2.12)$$

la cual es válida cuando el término dentro de la raíz es positivo, lo cual indica que la curva es tipo espacio. El caso negativo se emplea para definir el tiempo propio  $d\tau$ :

$$d\tau = \int \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \quad (2.13)$$

Posterior al vector de cuadrivelocidad, es rutinario definir  $p^\mu = mU^\mu$ , el cual es llamado cuádrimomento, cuyas componentes son  $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$  en el marco de referencia en reposo, y  $p^{\mu'} = (\gamma m, \gamma m v, 0, 0)$  en un marco que se mueve en la dirección  $x$  respecto al primero.

A continuación se introduce la noción de tensor en términos de vectores y uno-formas. Un tensor de tipo  $(k, l)$  es un mapeo multilineal de una colección de vectores y uno-formas a  $\mathbb{R}$ :

$$T : \underbrace{T_p^* \times \dots \times T_p^*}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{T_p \times \dots \times T_p}_{l \text{ veces}} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

En donde  $\times$  denota el producto cartesiano. La forma en que los tensores se transforman de un sistema coordenado  $x^\mu$  a otro sistema  $x^{\mu'}$  es, por ejemplo para un tensor de tipo  $(2, 1)$ , descrita por la siguiente ecuación:

$$T^{\mu'\nu'}_{\sigma'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\sigma'}} T^{\mu\nu}_\sigma. \quad (2.15)$$

Así, un tensor es una generalización de un vector a más índices, con la idea clave de que transforma de la misma forma que un vector para cada índice. Nótese que si se emplea la notación tensorial, ecuaciones como (2.1) pueden escribirse de manera compacta como  $x^{\mu'} = \Lambda_{\mu}^{\mu'} x^\mu$ , en donde las componentes  $\Lambda_{\mu}^{\mu'}$  son las entradas de siguiente matriz

$$\Lambda_{\mu}^{\mu'} = \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & -\sinh(\phi) & 0 & 0 \\ -\sinh(\phi) & \cosh(\phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

para  $\phi$  definido en  $\tanh(\phi) = v$ .

En el capítulo 1 se mencionó que debemos escribir las leyes de la física de forma covariante. Es por ello que introducimos los tensores, pues una ecuación tensorial es de este tipo porque estamos igualando componentes de ellos, las cuales llamaremos escalares. Un escalar es una cantidad sin índices, la cual es invariante bajo transformaciones de Lorentz, a diferencia de un número real usual.

El tensor métrico (1.2) se emplea para describir la curvatura del espacio-tiempo y tiene diversas propiedades: es simétrico, es de tipo  $(0, 2)$ , generalmente es no degenerado de manera que su determinante es diferente de cero y, de hecho, en esta tesis solo consideraremos métricas no degeneradas. Esto permite definir la inversa del tensor métrico como un tensor de tipo  $(2, 0)$ . En este trabajo, consideraremos métricas Lorentzianas, también llamadas pseudo-Riemannianas, las cuales tienen un único valor negativo en la signatura, comúnmente de la forma  $(-, +, +, +)$ .

La acción de Einstein-Hilbert, definida por

$$S = \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (2.17)$$

puede ser usada para obtener las ecuaciones de campo de Einstein en vacío. Es usual agregarse un término que dé origen al tensor de energía-momento que aparece en el lado derecho de (1.1). En dicha acción aparece el escalar de Ricci,  $R$ , el cual también aparece en las ecuaciones de campo de Einstein. Este es construido a partir de la métrica  $g_{\mu\nu}$  a través de una serie de pasos comúnmente empleados. Se inicia obteniendo los símbolos de Christoffel, los cuales son definidos en la siguiente ecuación:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}). \quad (2.18)$$

Estos símbolos son una conexión que describe cómo cambian los vectores a lo largo de un sistema coordinado debido a la curvatura de la métrica. En particular, describen cómo cambian los vectores base del sistema. Una característica que destaca de estos símbolos es que es simétrica en los dos índices inferiores:  $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$ .

Habiendo calculado estos símbolos, procedemos a definir el operador de derivada covariante,  $\nabla_\mu$ , de un campo vectorial  $V^\nu$  como

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} V^\sigma, \quad (2.19)$$

el cual es un operador diferencial bien definido tensorialmente, es decir, independiente del sistema coordenado empleado. Además, vimos que estos símbolos aparecen en la definición de geodésica. Decimos que una curva parametrizada  $x^\mu(\lambda)$  es una geodésica si obedece la ecuación (2.9), la cual puede reescribirse en términos del cuadrimomento como  $p^\lambda \nabla_\lambda p^\mu = 0$ . A partir de los símbolos de Christoffel se construye el tensor de Riemann  $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$  de tipo (1, 3), el cual contiene toda la información que necesitamos sobre la curvatura de la variedad. Por ejemplo, es cero si y solo si la métrica es plana. La siguiente ecuación dicta cómo obtener este tensor:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (2.20)$$

Sin embargo, la forma de este tensor es deducida pensando en cómo cambia un vector cuando es transportado en paralelo a través de dos direcciones diferentes [19]. Para ver las propiedades del tensor de Riemann es usual trabajarlo con todos los índices abajo,  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^\lambda_{\sigma\mu\nu}$ , de manera que este posee las siguientes simetrías: Es antisimétrico en los primeros dos índices,  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$ . Lo es también en los últimos dos índices,  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$ . Además, es invariante bajo un cambio del primer par de índices con el segundo par,  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$ . La identidad de Bianchi es una propiedad de este tensor, dada por  $\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0$ . Por último, la parte antisimétrica para los cuatro índices,  $R_{[\rho\sigma\mu\nu]}$ , y en particular para los últimos tres índices,  $R_{\rho[\sigma\mu\nu]}$ , son cero. A partir de este tensor, se obtiene el tensor de Ricci, definido en  $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ , el cual es simétrico. Posteriormente, se obtiene la traza del tensor de Ricci,  $R = R^\mu_{\mu}$ , llamada escalar de Ricci [19].

---

## Capítulo 3

# Soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein

El espacio-tiempo empleado en relatividad especial es descrito por la métrica de Minkowski, la cual es una solución a las ecuaciones de Einstein donde la curvatura es cero, pues no se consideran efectos gravitacionales [6]. En coordenadas esféricas, el intervalo entre eventos en esta geometría está dado por la ecuación (2.5). Con esta herramienta se pueden describir diversos fenómenos como la dilatación del tiempo, la contracción de la longitud y el efecto Doppler. En un diagrama de esta métrica se introducen los conos de luz como un recurso para describir la estructura causal del espacio-tiempo (ver figura 3.1). Sin embargo, esta es la solución más trivial y existen otras que representan situaciones más interesantes. Por ejemplo, el campo gravitacional en las inmediaciones de nuestro planeta puede ser descrito a través de la siguiente métrica:  $ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$ , en donde  $\Phi = -GM/r$  [7]. Esta desviación de la métrica de Minkowski, debida a  $\Phi$ , es la responsable de que todos los objetos en nuestro planeta caigan con una aceleración de aproximadamente  $9.8 \text{ m/s}^2$ .



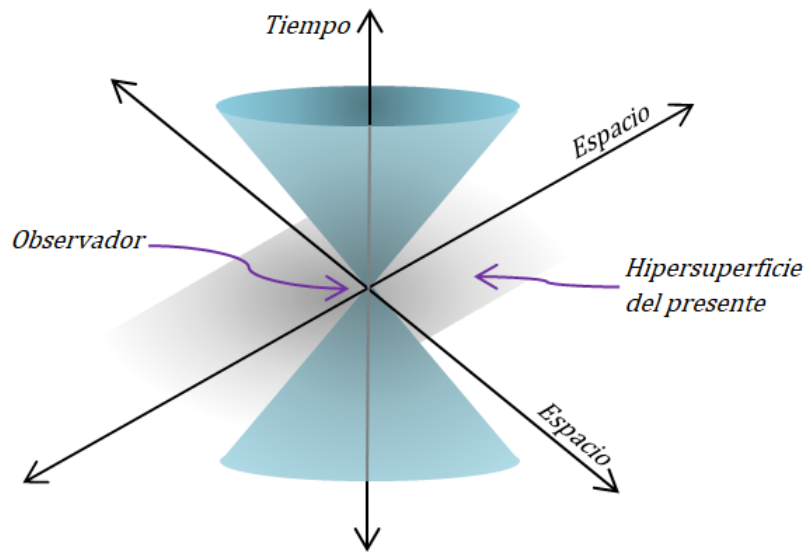


Figura 3.1: Estructura causal del espacio-tiempo de Minkowski. El cono en la dirección positiva del tiempo es denominado como cono de luz de futuro, mientras el que se encuentra en la dirección negativa del tiempo recibe el nombre de cono de luz de pasado. Este diagrama determina cuáles eventos pueden ser conectados a través de una trayectoria tipo tiempo, con  $ds^2 < 0$ , cuáles pueden ser conectados con una tipo luz, con  $ds^2 = 0$ , y cuáles no pueden ser conectados empleando estas. En este último caso, los eventos no pueden afectarse entre sí y se dice que no están conectados causalmente.

### 3.1. Métrica de Schwarzschild

La primera solución a las ecuaciones de Einstein luego de su publicación fue dada por Schwarzschild y tiene la siguiente forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2. \quad (3.1)$$

Esta métrica puede ser obtenida a partir de las ecuaciones (1.1) mediante la propuesta de una métrica que sea estática y que posea simetría esférica, tal como la siguiente:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2 e^{2\gamma(r)} [d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta) d\phi^2], \quad (3.2)$$

la cual es introducida en la ecuación  $R_{\mu\nu} = 0$ , pues se asume que el exterior del cuerpo es vacío. El procedimiento es obtener los símbolos de Christoffel (2.18) y posteriormente las componentes de los tensores de Riemann y de Ricci. El resultado es  $e^{2\alpha(r)} = e^{-\beta(r)} = 1 - r_s/r$ . De acuerdo al teorema de Birkhoff, cualquier solución de las ecuaciones de campo de Einstein en vacío ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) que posea simetría esférica también es estática y asintóticamente plana, es decir, es la métrica de Schwarzschild. En su forma original, (3.1) puede describir el exterior de una estrella o un agujero negro. Sin embargo, luego de aplicar ciertas transformaciones de coordenadas, puede reescribirse en una forma conforme plana en secciones de ángulos constantes con  $d\theta = 0$  y  $d\phi = 0$ , en la cual podrá describir también el interior de un agujero negro. Esta forma recibe el nombre de coordenadas de Kruskal-Szekeres y serán introducidas en el capítulo 4. Así mismo, existen otras coordenadas que son más convenientes para describir diferentes situaciones. El objetivo de las coordenadas isotrópicas para esta métrica es reescribirla en una forma donde las secciones de espacio sean lo más parecidas posible a un espacio Euclideo. En el capítulo 5 se muestra un camino para obtenerlas. Por otro lado, las coordenadas de Lemaître son sincrónicas y son creadas mediante un sistema de relojes en caída libre desde infinito hacia  $r = 0$ , pues la posición  $r_s$  no presenta un problema en estas coordenadas. Las *cartas* de Painlevé-Gullstrand y las armónicas son otros sistemas empleados para describir diferentes escenarios en esta métrica.

## 3.2. Métrica de de-Sitter

Continuando en orden cronológico, la métrica de de-Sitter es usada para describir un universo maximalmente simétrico con curvatura positiva [7]. Esta característica tiene consecuencias interesantes, pues el escalar de curvatura de Ricci,  $R = R^\mu{}_\mu$ , será constante y poseerá el mayor número posible de vectores de Killing. Este espacio puede incrustarse en un espacio pentadimensional de Minkowski y es definido

como una hipersuperficie de radio  $a$  con la siguiente ecuación:

$$a^2 = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

En coordenadas estáticas la métrica toma la siguiente forma:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dt^2 + \left( \frac{1}{1 - \frac{\Lambda}{3} r^2} \right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2, \quad (3.3)$$

aunque es interesante considerar un observador que es arrastrado junto con el horizonte cosmológico, en cuyo caso la métrica no es estática, sino que se reescribe como

$$ds^2 = -dT^2 + e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}T} (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2). \quad (3.4)$$

### 3.3. Métrica de Schwarzschild-de-Sitter

Entre otras métricas, existe la métrica de Schwarzschild cuando se considera constante cosmológica, la cual recibe el nombre de Schwarzschild-de-Sitter y toma la siguiente forma [20]:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dt^2 + \left( \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2} \right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2. \quad (3.5)$$

Esta es una solución con simetría esférica y con dos horizontes, uno es asociado con un agujero negro de parámetro  $m = r_s/2$ , mientras que el otro corresponde a un horizonte cosmológico con parámetro  $\Lambda$ . Se piensa que existe una región estática en  $R_s < r < R_D$  debido a que el efecto de la expansión del universo debida a la constante cosmológica dilata el horizonte del agujero negro, mientras que la atracción gravitacional debido a la masa  $m$  ocasiona que el horizonte cosmológico se contraiga. Esta región se usa para modelar el exterior de un cuerpo que sufre un colapso gravitacional en una región de inflación. Cuando se satisface la siguiente relación

entre el radio de Schwarzschild  $m$  y la constante cosmológica  $\Lambda$ , se tiene que los dos horizontes coinciden [21]:

$$m\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = 3^{-3/2}.$$

### 3.4. Agujeros negros con carga eléctrica: Reissner-Nordström

Cuando se considera la métrica de Schwarzschild para un objeto esféricamente simétrico con carga eléctrica, recibe el nombre de métrica de Reissner-Nordström [22], la cual está descrita por el siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \left( \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} \right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2. \quad (3.6)$$

Esta es una solución estática con una propiedad interesante de que posee dos horizontes de eventos concéntricos. Aquí,  $M$  es la masa del cuerpo, y  $Q$  la carga eléctrica. Cuando se cumple  $M^2 = Q^2$  en esta métrica, es llamada métrica de Reissner-Nordström extremal:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{M}{r} \right)^2 dt^2 + \frac{1}{\left( 1 - \frac{M}{r} \right)^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2. \quad (3.7)$$

En la figura (3.2) se muestran los otros casos para la relación entre  $M$  y  $Q$ . Aquí, la carga  $Q$  que pasa a través de una hipersuperficie  $\Sigma$  es definida por

$$Q = - \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{\gamma} n_{\mu} J_e^{\mu}, \quad (3.8)$$

donde  $\gamma_{ij}$  es una métrica inducida en dicha hipersuperficie y  $n^{\mu}$  es el vector normal unitario asociado con  $\Sigma$  [7]. En algunos textos se incluye un término debido a la carga magnética, pero los monopolos magnéticos no han sido observados en la naturaleza, por lo cual es común omitir dicho término. El teorema de Stokes puede ser aplicado a

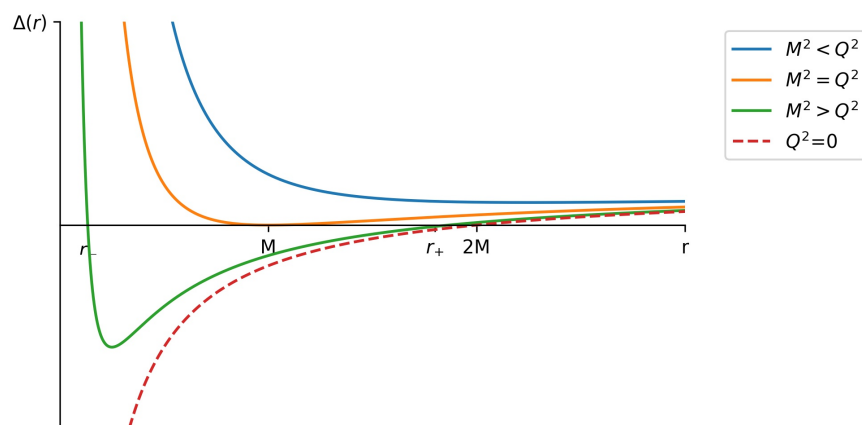


Figura 3.2: Gráfica de  $\Delta(r)$  como función de  $r$ , donde  $\Delta(r) = 1 - 2M/r + Q^2/r^2$ . Se logra apreciar que cuando  $M^2 < Q^2$  no existen horizontes de eventos. Luego, cuando  $M^2 = Q^2$  tendremos un único horizonte de eventos y se le llama caso extremal. Cuando ocurre  $M^2 > Q^2$  existirán dos horizontes de eventos localizados en  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ .

esta integral para reescribirla como una integral sobre la frontera de  $\Sigma$ , denotada por  $\partial\Sigma$ . El caso extremal es inestable, pues el agregar un poco de materia lo convertiría en el caso  $M^2 > Q^2$ , pero esto no lo detiene en ser de especial interés en gravedad cuántica y teorías supersimétricas.

### 3.5. Modelos cosmológicos: Métrica de Friedmann

La métrica Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker describe un universo expandiéndose, que es isotrópico y homogéneo en secciones espaciales:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2 \right). \quad (3.9)$$

En esta métrica, cuando  $k = 0$  tendremos un espacio Euclídeo tridimensional en cada momento de tiempo, expandiéndose como función de este. Aquí, la distancia relativa entre puntos comoviéndose crece a medida que el factor de escala  $a(t)$  crece. Típicas soluciones para el factor de escala son de la forma  $a(t) = t^q$ , donde  $q = 2/3$  describe el universo como dominado por materia, mientras que  $q = 1/2$  indica

dominio por parte de radiación. De manera equivalente, podemos ver estos casos en términos de la presión  $p$  y la densidad de energía  $\rho$ , pues tendremos la ecuación de estado  $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ . Para materia tendremos  $p = 0$ , para radiación será  $p = (1/3)\rho$  y para vacío será  $p = -\rho$ . En estas coordenadas, el tiempo  $t = 0$  describe una singularidad, que corresponde al Big Bang, de manera que debe ser excluída de la variedad. Así pues, el rango del tiempo es  $0 < t < \infty$ . El corrimiento al rojo cosmológico es consistente con esta métrica, pues recientes observaciones indican que nuestro universo se podría estar expandiendo. Es interesante mencionar las ecuaciones de Friedmann, resultado de introducir esta métrica en las ecuaciones de campo de Einstein (1.1),

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2}, \quad (3.10)$$

y

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi}{3}(\rho + 3p). \quad (3.11)$$

La tasa de expansión es caracterizada por el parámetro de Hubble definido en  $H = \dot{a}/a$ , el cual muestra un valor no constante en observaciones llevadas a cabo los últimos años [23]. Para propósitos de esta tesis es necesario evaluar en qué situaciones la métrica (3.9) puede transformarse hacia una forma estática [24, 25] con la siguiente estructura:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2(\theta)d\phi^2. \quad (3.12)$$

Para ello, se considerará la transformación

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial y^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial y^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \gamma_{\mu'\nu'}, \quad (3.13)$$

en donde

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1-k\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2\rho^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

y

$$\gamma_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Aquí, los sistemas coordenados son  $x^\mu = (T, \rho, \theta, \phi)$  y  $y^{\mu'} = (t, r, \theta, \phi)$ . El diferencial de ángulo sólido es el mismo para ambas métricas, por lo que los términos angulares implican la relación  $r = a\rho$ . Así, para resolver el sistema basta con considerar las ecuaciones que surgen de las entradas  $g_{00}$ ,  $g_{01}$  y  $g_{11}$  en la transformación (3.13):

$$g_{00} = (\dot{t})^2(-f) + (\dot{r})^2\frac{1}{f} = -1, \quad (3.16)$$

en donde  $\dot{t} = \partial t / \partial T$ . Así mismo, las demás entradas son

$$g_{11} = -f(t')^2 + \frac{1}{f}(r')^2 = \frac{a^2}{1-k\rho^2} \quad (3.17)$$

y

$$g_{01} = \dot{t}t'(-f) + \dot{r}r'\frac{1}{f} = 0. \quad (3.18)$$

Se ha empleado la notación  $r' = \partial r / \partial \rho$ . Estas ecuaciones son reordenadas como

$$(\dot{t})^2 = \frac{1}{f^2}(f + \dot{a}^2\rho^2), \quad (3.19)$$

$$(t')^2 = \frac{a^2}{f^2} \left( 1 - \frac{f}{1-k\rho^2} \right) \quad (3.20)$$

y

$$f^4(\dot{t})^2(t')^2 = \dot{a}^2 \rho^2 a^2, \quad (3.21)$$

respectivamente. Para continuar, es necesario sustituir las ecuaciones (3.19) y (3.20) en (3.21):

$$f^4 \left[ \frac{1}{f^2} (f + \rho^2 \dot{a}^2) \frac{a^2}{f^2} \left( 1 - \frac{f}{1 - k\rho^2} \right) \right] = \rho^2 \dot{a}^2 a^2. \quad (3.22)$$

La simplificación de esta expresión da lugar a una forma para la función  $f(r)$  como  $1 - \rho^2(\dot{a}^2 + k)$ . Esta es la expresión vital que aparecerá en la forma estática del modelo cosmológico en cuestión. La sustitución de esta expresión en (3.19) y (3.20) da lugar a las siguientes ecuaciones:

$$\dot{t}^2 = \frac{1 - k\rho^2}{f^2} \quad (3.23)$$

y

$$(t')^2 = \frac{\rho^2 a^2 \dot{a}^2}{f^2(1 - k\rho^2)}. \quad (3.24)$$

Para el siguiente paso es necesario calcular las derivadas de  $f$ :

$$f' = \frac{\partial f}{\partial \rho} = -2\rho(\dot{a}^2 + k)$$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial T} = -\rho^2(2\dot{a}\ddot{a}).$$

Para combinar las ecuaciones (3.23) y (3.24) es necesario derivar la primera respecto de  $\rho$  y la segunda respecto de  $T$ , con el fin de obtener diferentes expresiones para  $\partial^2 t / \partial T \partial \rho$  y  $\partial^2 t / \partial \rho \partial T$  e igualarlas:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\dot{t}^2) = \frac{-2k\rho f^2 - (1 - k\rho^2)2f \frac{\partial f}{\partial \rho}}{f^4} \quad (3.25)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial T}(t'^2) = \frac{\rho^2}{1 - k\rho^2} \frac{1}{f^4} \left[ (2a\dot{a}\ddot{a}^2 + 2a^2\ddot{a}\dot{a})f^2 - a^2\dot{a}^2 \frac{\partial f}{\partial T} 2f \right]. \quad (3.26)$$



Es vital extraer el término mencionado de estas ecuaciones. Para (3.25) este está dado por

$$\frac{\partial^2 t}{\partial T \partial \rho} = \frac{2k\rho - 2k^2\rho^3 - 2k\rho^3\dot{a}^2 + 4\rho\dot{a}^2}{2f^3 \frac{1}{f} \sqrt{1 - k\rho^2}}. \quad (3.27)$$

Por otro lado, para (3.26) este término está determinado en

$$\frac{\partial^2 t}{\partial T \partial \rho} = \frac{\rho}{2f^2 a \dot{a} \sqrt{1 - k\rho^2}} (2a\dot{a}^3 + 2a^2\dot{a}\ddot{a} - 2a\rho^2\dot{a}^5 - 2ak\rho^2\dot{a}^3 - 2ka^2\rho^2\dot{a}\ddot{a} + 2\rho^2a^2\dot{a}^3\ddot{a}). \quad (3.28)$$

El siguiente paso es igualar (3.27) y (3.28) y efectuar una simplificación que dé lugar a una ecuación para el factor  $a(T)$ . Luego de un poco de álgebra, la expresión resultante es

$$\ddot{a}(-2a + 2ka\rho^2 - 2a\rho^2\dot{a}^2) + \dot{a}^2(2 + 2\rho^2\dot{a}^2) + k(2 - 2k\rho^2) = 0, \quad (3.29)$$

la cual puede factorizarse como

$$[(\dot{a}^2 + k) - a\ddot{a}] [1 + \rho^2 (\dot{a}^2 - k)] = 0. \quad (3.30)$$

Si suponemos que el segundo término de esta expresión es cero, la ecuación resultante es

$$\frac{\partial a}{\partial T} = \sqrt{k\rho^2 - 1}, \quad (3.31)$$

cuya integración daría lugar a un factor  $a(T)$  que también será dependiente de  $\rho$ , lo cual es contradictorio, pues en la métrica de Friedmann se asume que este sólo depende de  $T$ . Por lo tanto, el primer término de (3.30) es igual a cero:

$$(\dot{a}^2 + k) - a\ddot{a} = 0. \quad (3.32)$$

Esta se puede reescribir como

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}, \quad (3.33)$$

cuya integración implica la siguiente relación:

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \Gamma. \quad (3.34)$$

Esta ecuación equivale a la primera ecuación de Friedmann en vacío  $\rho = 0$  con la identificación de  $\Gamma = \Lambda/3$ . Es interesante notar que esta ecuación emerge de una transformación de simetría sin la necesidad de invocar ninguna ecuación dinámica como las ecuaciones de campo de Einstein. Así, (3.34) implica la relación

$$\dot{a} = \sqrt{\Gamma a^2 - k}. \quad (3.35)$$

Es necesario considerar los diferentes signos que puede tomar la constante  $\Gamma$  y los tres valores posibles de  $k$ , a saber  $\pm 1$  y  $0$ . Con los resultados obtenidos y recordando que  $r = a\rho$ , podemos obtener diferentes expresiones estáticas para la métrica de Friedmann. Trabajando el caso en que  $\Gamma < 0$  notamos que (3.35) implica que  $k$  sólo puede tomar el valor  $-1$ , pues si  $k = 0$  o  $k > 0$  la ecuación mencionada poseerá un término en los números imaginarios. El resultado de integrar (3.35) es  $a(T) = (1/\sqrt{|\Gamma|}) \text{sen}(\sqrt{|\Gamma|}T)$  y  $f(r) = 1 + |\Gamma|r^2$ . Esta métrica es conocida y recibe el nombre de espacio de Anti-de-Sitter. Las formas dinámica y estática de este son escritas a continuación:

$$ds^2 = -dT^2 + \frac{1}{|\Gamma|} \text{sen}^2(\sqrt{|\Gamma|}T) \left( \frac{d\rho^2}{1 + \rho^2} + \rho^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2 \right) \quad (3.36)$$

y

$$ds^2 = -(1 + |\Gamma|r^2) dt^2 + \frac{1}{(1 + |\Gamma|r^2)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2. \quad (3.37)$$

Por otro lado, el caso en que  $\Gamma = 0$  implica que  $k$  no puede tomar el valor positivo  $+1$ . Así, cuando  $k = 0$  tenemos  $a(T) = cte$  y  $f(r) = 1$ , el cual corresponde a un espacio de Minkowski. Cuando  $k = -1$  el resultado es  $\dot{a} = cte$  y  $f(r) = 1$ . Este también es mapeado hacia Minkowski en coordenadas estáticas, aunque en coordenadas

dinámicas toma la forma

$$ds^2 = -dT^2 + T^2 \left( \frac{d\rho^2}{1 + \rho^2} + \rho^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2 \right), \quad (3.38)$$

el cual recibe el nombre de espacio de Milne. Finalmente, cuando  $\Gamma > 0$  se pueden considerar los tres casos posibles para  $k$ . Cuando  $k = 0$  el resultado es  $a(T) = e^{\sqrt{\Gamma}T}$  y  $f(r) = 1 - \Gamma r^2$ . Este es el espacio de de-Sitter introducido en (3.3). Cuando  $k = -1$  la forma de  $a(T)$  está dada por  $a(T) = (1/\sqrt{\Gamma}) \text{senh}(\sqrt{\Gamma}T)$ , mientras que la función  $f(r)$  es la misma que en de-Sitter. Así mismo, el caso para  $k = +1$  resulta en  $a(T) = (1/\sqrt{\Gamma}) \text{cosh}(\sqrt{\Gamma}T)$  y en la misma  $f(r)$ , estos últimos dos casos son llamados universos de Lanczos.

---

## Capítulo 4

# Coordenadas de Kruskal para la métrica de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild es exitosa en describir el exterior de un agujero negro y en aproximar estrellas y planetas, pues es una solución para las ecuaciones de campo de Einstein en vacío y posee simetría esférica. Un procedimiento rutinario en el análisis de esta métrica dirige a las coordenadas de Kruskal-Szekeres, donde la coordenada radial es bien comportada en la superficie del horizonte de eventos  $r_s = 2m$  y donde se puede visualizar toda la variedad en un plano, por lo cual esta recibe el nombre de extensión maximal de la métrica de Schwarzschild. Existen diversos métodos para obtener dichas *cartas*: El convencional consiste en aplicar diversas transformaciones pasando a través de coordenadas como Regge-Wheeler y Eddington-Finkelstein, mientras que otro emplea la extensión parcial dada por Painlevé-Gullstrand.

### 4.1. Hacia las coordenadas de tortoise y Eddington-Finkelstein

El método convencional es ilustrado a continuación. Consideremos curvas radiales nulas para ángulos constantes, esto es,  $ds^2 = 0$  y  $d\theta = d\phi = 0$  en coordenadas

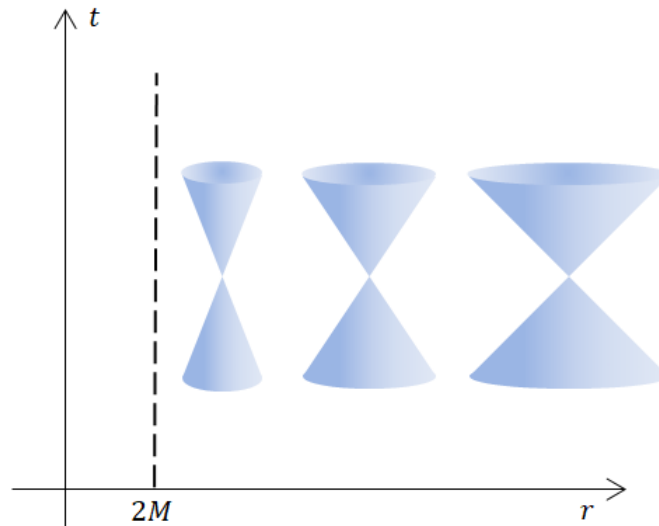


Figura 4.1: En la métrica de Schwarzschild, los conos de luz tienden a cerrarse cuando la coordenada radial  $r$  se acerca al horizonte de sucesos dado por  $2M$ .

esféricas. Con estas consideraciones, la métrica (3.1) tomará la siguiente forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0, \quad (4.1)$$

de donde podemos calcular el siguiente término:

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (4.2)$$

Esta es la pendiente de los conos de luz en un diagrama de espacio-tiempo en un plano  $r$ - $t$ . Vale la pena notar que, a medida que  $r$  tiende a  $2M$ , la pendiente se acerca a  $\pm\infty$  (ver figura 4.1). Esto significa que los conos de luz se cierran, de manera que nuestra coordenada radial no podrá alcanzar el horizonte de eventos. Esta es una de las motivaciones para trabajar con otras coordenadas. En particular, buscaremos aquellas que sean bien comportadas en  $r_s = 2M$ . Introducimos la coordenada de tortoise con la siguiente transformación

$$r^* = r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right). \quad (4.3)$$

En este nuevo sistema de coordenadas,  $(t, r^*)$ , la métrica tomará la siguiente forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2, \quad (4.4)$$

donde estamos considerando  $r$  como función de  $r^*$ . En este caso, los conos de luz no se cierran a medida que  $r^*$  se acerca a  $2M$ . Sin embargo, el horizonte de eventos ahora se alcanza cuando  $r^* \rightarrow -\infty$  (ver figura 4.2).

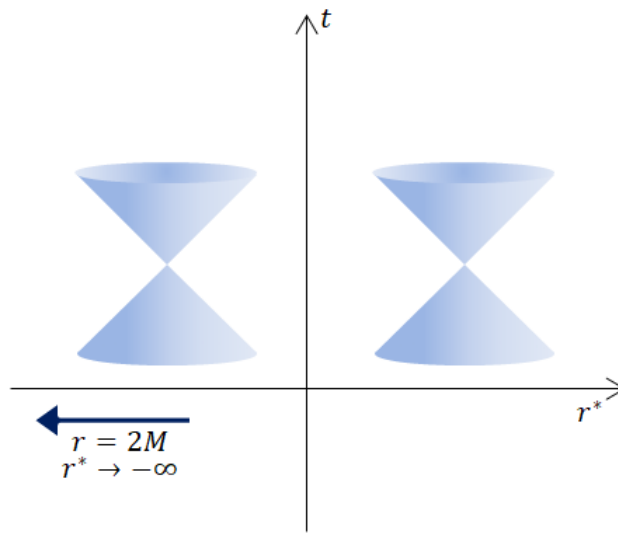


Figura 4.2: Coordenadas tortoise para la métrica de Schwarzschild. En esta imagen se ilustra que el punto  $r = 2M$  ha sido movido a  $r^* \rightarrow -\infty$ .

El siguiente paso es introducir las coordenadas

$$v = t + r^* \quad (4.5)$$

$$u = t - r^*. \quad (4.6)$$

En el caso que elegimos el sistema  $(v, r)$  el elemento de longitud toma la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv^2 + (dvdr + drdv) + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2 \quad (4.7)$$

y este lleva por nombre coordenadas de Eddington-Finkelstein para la métrica de

Schwarzschild. Aquí,  $r$  es regular incluso cuando se acerca a  $2M$ . Entonces hemos encontrado unas coordenadas que son bien comportadas en  $r_s = 2M$  y además se evitó enviar la nueva coordenada radial hacia un valor divergente. Sin embargo, todavía podemos extender esta métrica, considerando que las partículas pueden cruzar a través de  $r = 2M$ . Así pues, se realiza otra transformación coordenada para que se incluya la región  $r \leq 2M$ .

## 4.2. La solución maximalmente simétrica de Schwarzschild

Cuando elegimos la coordenada  $v$  en (4.5) para nuestras nuevas coordenadas, hemos limitado nuestro sistema coordenado a que pueda cruzar el horizonte de eventos solamente a través de curvas con dirección futura. En su lugar, podemos elegir la coordenada  $u$  y trabajar con el par  $(u, r)$ . En cuyo caso, el elemento de longitud tomará la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) du^2 - (dudr + drdu) + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2. \quad (4.8)$$

En este caso, el horizonte de eventos puede ser atravesado mediante curvas con dirección de pasado. Como siguiente paso, consideraremos ambas coordenadas  $(u, v)$ , lo cual nos dirigirá al elemento de longitud

$$ds^2 = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dvdu + dudv) + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2. \quad (4.9)$$

La solución para  $r$  en términos de  $(u, v)$  está dada por

$$\frac{1}{2}(v - u) = r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right), \quad (4.10)$$

donde podemos ver que  $r = 2M$  ocurre en  $v \rightarrow -\infty$  o  $u \rightarrow +\infty$ . La siguiente transformación coordenada que realizaremos es

$$v' = e^{v/4M} \quad (4.11)$$

$$u' = -e^{-u/4M}, \quad (4.12)$$

para las cuales nuestro elemento de longitud se escribe como

$$ds^2 = -\frac{16M^3}{r} e^{-r/2M} (dv' du' + du' dv') + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2. \quad (4.13)$$

El próximo problema con el que trataremos es que  $v'$  y  $u'$  son coordenadas nulas, es decir,  $\partial/\partial v'$  y  $\partial/\partial u'$  son vectores nulos [7]. Para ello, se lleva a cabo una última transformación coordenada descrita por las siguientes ecuaciones:

$$T = \frac{1}{2}(v' + u') = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \sinh\left(\frac{t}{4M}\right) \quad (4.14)$$

y

$$R = \frac{1}{2}(v' - u') = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{r/4M} \cosh\left(\frac{t}{4M}\right). \quad (4.15)$$

$T$  y  $R$  son llamadas coordenadas de Kruskal-Szekeres para la métrica de Schwarzschild. Es interesante mencionar que el elemento de longitud toma la siguiente forma

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2. \quad (4.16)$$

Estas coordenadas tienen varias propiedades interesantes. El horizonte de eventos no está en infinito, es definido por líneas de la forma  $T = \pm R$ . Los rangos de nuestras coordenadas son  $-\infty \leq R \leq +\infty$  y  $T^2 < R^2 + 1$ . Con estos valores podemos dibujar el plano  $R$ - $T$ , llamado diagrama de Kruskal (ver figura 4.3). Este es conocido también por el nombre de extensión maximal de la geometría de Schwarzschild. En esta forma, la métrica describirá la mayor región posible de espacio-tiempo. En este



plano veremos diversas hipérbolas, debido a que la relación que existe entre las coordenadas  $T$  y  $R$  se puede obtener elevando al cuadrado las ecuaciones (4.14) y (4.15) y efectuando una resta de la forma

$$T^2 - R^2 = \left(1 - \frac{r}{2M}\right) e^{r/2M}, \quad (4.17)$$

la cual es una ecuación de hipérbola para cada valor de  $r$ , mientras que para cada valor del tiempo  $t$  se ilustran líneas rectas descritas por la relación  $T = R \tanh(t/2r_s)$ . Como se mencionó, el horizonte de eventos  $r_s$  corresponde a líneas rectas con pendiente de  $45^\circ$ , de manera que la superficie es nula. Esto es, un objeto en esta posición se mueve a la velocidad de la luz. Vale la pena mencionar que dentro del agujero negro el rol del tiempo y el espacio se intercambian, en el sentido de que la coordenada  $r$  marcha inevitablemente hacia  $r = 0$ , el cual puede describirse como una superficie tipo espacio que está en el futuro de todos los puntos interiores del agujero negro. Cerca de este punto, el escalar de curvatura diverge, por lo que se habla de una curvatura infinita. En el mismo plano se pueden observar cuatro regiones, las cuales se ilustran con números romanos. La región I corresponde a la región  $r > r_s$ , el parche en el cual nuestras coordenadas originales fueron bien definidas. A través de haces de luz nulos futuro dirigidos se puede alcanzar la región II partiendo de I. La región II es lo que se describe como el interior de un agujero negro. Una vez que algo viaja de la región I a la II no podrá volver. De hecho, cualquier trayectoria futuro dirigida en la región II terminará acercándose asintóticamente a la singularidad  $r = 0$ . Se dice, pues, que una vez que cruzas el horizonte de eventos ya no puedes regresar. Además de que no se puede escapar de la región II, no es posible detener el movimiento en la dirección radial decreciente, ya que el tiempo ahora es tipo espacio, mientras que  $r$  es tipo tiempo. Por lo tanto, solo es posible seguir trayectorias tipo espacio dentro de la región II. La región IV es como la región II, pero con el tiempo invertido. Esto es, una región del espacio-tiempo de la cual se puede escapar pero nunca se puede llegar a ella. Algunos autores la mencionan como un agujero blanco.

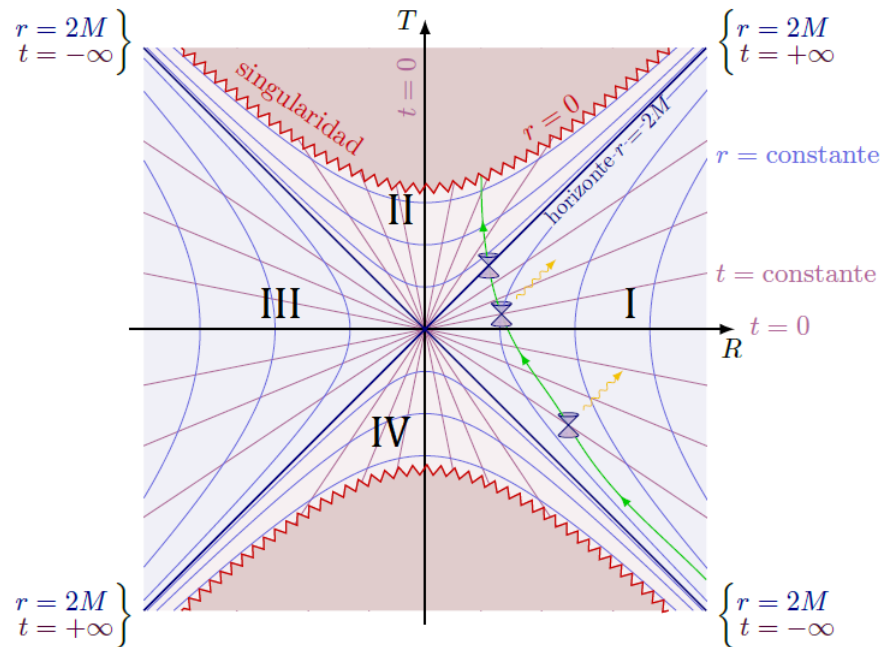


Figura 4.3: Diagrama de Kruskal-Szekeres. La solución de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal, donde todos los conos de luz están a  $45^\circ$ . Cada punto de este diagrama es una 2-esfera a un momento  $T$ , pues cada punto corresponde a una posición  $R$ , además de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  que se mantuvieron constantes para realizar este diagrama.

La región III no puede ser alcanzada partiendo de la región I y es considerada como una región conectada a nuestra región a través de un agujero de gusano, o puente de Einstein-Rosen [26, 27].

Un procedimiento alternativo para obtener las coordenadas de Kruskal-Szekeres emplea dos coordenadas de Painlevé-Gullstrand definidas de manera diferencial como

$$d\tau_{\pm} = E dt \pm \frac{(E^2 - 1 + \frac{2M}{r})^{1/2}}{1 - \frac{2M}{r}} dr, \quad (4.18)$$

en donde  $E \geq 1$  [28]. El significado de  $\tau_{\pm}$  es que logran la congruencia de geodésicas tipo tiempo radiales salientes y entrantes con energía  $E$ . El resultado de esta

transformación es el siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = \frac{-1}{4E^2} \frac{1 - \frac{2M}{r}}{E^2 - 1 + \frac{2M}{r}} \left[ - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) (d\tau_+^2 + d\tau_-^2) + 2 \left( 2E^2 - 1 + \frac{2M}{r} \right) d\tau_+ d\tau_- \right]. \quad (4.19)$$

En donde hemos omitido el elemento de ángulo sólido por simplicidad y porque no es alterado mediante la introducción de  $\tau_{\pm}$ . Esta es llamada métrica de Schwarzschild en coordenadas dobles de Painlevé-Gullstrand. El siguiente paso en este método es realizar la transformación hacia las coordenadas  $(\tau'_+, \tau'_-)$  definidas en  $\tau'_{\pm} = \pm M \exp(\pm \tau_{\pm}/4ME)$  y considerar los casos  $E = 1$ ,  $E > 1$  y  $E \rightarrow \infty$ . El resultado es que el horizonte de eventos  $2M$  posee dos soluciones dadas por  $\tau_{\pm} = 0$ , las cuales son superficies nulas representadas por líneas rectas, mientras que la singularidad  $r = 0$  es representada por hipérbolas tipo espacio dadas por la ecuación  $\tau_+ \tau_- = M^2$ . El diagrama de Kruskal en coordenadas  $\tau_{\pm}$  puede ser encontrado en la referencia [28]. Este comparte las mismas propiedades que el diagrama (4.3): Se tienen cuatro regiones, la presencia de un agujero de gusano, un agujero blanco y dos regiones asintóticamente planas.

---

## Capítulo 5

# Transformaciones y coordenadas conformes

Una transformación conforme es un cambio local de escala. Una de las características más importantes es que preserva ángulos. Por ejemplo, el ángulo entre cualesquiera dos cuadvectores es preservado. En términos de métricas podemos representarla como

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \zeta^2(x)g_{\mu\nu} \quad (5.1)$$

o equivalentemente

$$\tilde{d}s^2 = \zeta^2(x)ds^2, \quad (5.2)$$

donde  $\zeta^2(x)$  es llamado factor conforme y debe ser diferente de cero. Estas transformaciones tienen diversos usos; en este trabajo las usaremos para mapear diferentes espacio-tiempos en una nueva métrica que sea conforme plana en secciones de ángulos constantes. Otra característica de estas transformaciones es que las curvas nulas son mantenidas invariantes mediante una transformación conforme. La transformación conforme inversa es trivial considerando la ecuación (5.1):

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{\zeta^2} \tilde{g}_{\mu\nu}. \quad (5.3)$$

El hecho de que estas transformaciones preserven ángulos implica que los conos de luz también son invariantes bajo ellas. Además, la derivada covariante de un campo escalar  $\phi$  es mantenida invariante, aunque la segunda derivada covariante no lo será. Por otro lado, de la ecuación (5.2) se puede observar que no estamos cambiando de métrica como tal, sino que estamos cambiando la geometría de nuestro espacio-tiempo, pues el elemento de línea es modificado por un factor de escala que depende del espacio-tiempo en cuestión. Como consecuencia de este cambio de geometría, algunos de los tensores usuales de relatividad general son modificados. Los símbolos de Christoffel son modificados debido a que se obtienen directamente de aplicar derivadas a la métrica como dicta la ecuación (2.18). Como resultado, la nueva expresión para estos símbolos es

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + C_{\mu\nu}^{\alpha}, \quad (5.4)$$

donde la cantidad  $C_{\mu\nu}^{\alpha}$  es un tensor porque es la diferencia de dos símbolos de Christoffel [7]. La expresión para este tensor está dada por

$$C_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{\zeta} (\delta_{\mu}^{\rho} \nabla_{\nu} \zeta + \delta_{\nu}^{\rho} \nabla_{\mu} \zeta - g_{\mu\nu} g^{\rho\lambda} \nabla_{\lambda} \zeta). \quad (5.5)$$

Así mismo, el tensor de curvatura de Riemann es obtenido mediante derivadas y productos de símbolos de Christoffel, por lo que es posible encontrar una expresión para su versión conforme:

$$\tilde{R}^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_{\mu} C^{\rho}_{\nu\sigma} - \nabla_{\nu} C^{\rho}_{\mu\sigma} + C^{\rho}_{\mu\lambda} C^{\lambda}_{\nu\sigma} - C^{\rho}_{\nu\lambda} C^{\lambda}_{\mu\sigma}. \quad (5.6)$$

Sucesivamente, es posible obtener expresiones para el tensor y escalar de Ricci, así como para las soluciones inversas (ver apéndice G de [7]) en las que se tendrán tensores como  $R_{\mu\nu}$  en términos de  $\tilde{R}_{\mu\nu}$  y  $\zeta$ .

Como ya se mencionó, nos interesan las transformaciones que lleven una métri-

cas hacia una forma conforme plana en donde se cumple la relación

$$\tilde{g}_{ab} = \zeta^2 \eta_{ab} \quad a, b = 0, 1, \quad (5.7)$$

es decir, aquellas que se pueden llevar a una métrica con la signatura de Minkowski multiplicada por el factor conforme  $\zeta^2$  cuando se consideran secciones de coordenadas constantes.

## 5.1. Coordenadas isotrópicas para la métrica de Schwarzschild

Como motivación, podemos comenzar con transformar una métrica conocida en una forma que sea conforme en espacio en secciones de tiempo constante. Elegimos trabajar con la métrica de Schwarzschild en su forma original:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(\frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}\right) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2, \quad (5.8)$$

pues es un ejemplo sencillo e interesante. El procedimiento será llevar esta métrica hacia la siguiente forma:

$$ds^2 = f dt^2 + b (d\rho^2 + \rho^2 d\theta + \rho^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2), \quad (5.9)$$

en donde  $f = f(\rho)$  y  $b = b(\rho)$  son funciones por determinar. Para ello emplearemos la siguiente transformación de coordenadas

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^{\nu'}} g_{\mu\nu}, \quad (5.10)$$

donde los índices primados se refieren a la nueva métrica (5.9) y los índices no primados corresponden a la métrica original de Schwarzschild:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r_s}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

y

$$g_{\mu'\nu'} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b\rho^2 \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Para trabajar con esta transformación de coordenadas, basta considerar las entradas  $g_{1'1'}$  y  $g_{2'2'}$ . Para la primera entrada tendremos la siguiente ecuación:

$$\left( \frac{\partial r}{\partial \rho} \right)^2 \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} = \zeta^2. \quad (5.13)$$

Por otro lado,  $g_{2'2'}$  se lee como

$$r^2 = \zeta^2 \rho^2, \quad (5.14)$$

en donde hemos llamado  $\zeta^2$  a  $b$  por conveniencia, el cual realiza el papel de factor conforme para secciones de espacio a tiempo constante. Tomamos el valor de  $\zeta^2$  obtenido en (5.14) y lo sustituimos en (5.13), de manera que llegaremos a la siguiente ecuación diferencial

$$\left( \frac{\partial r}{\partial \rho} \right)^2 \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} = \frac{r^2}{\rho^2}. \quad (5.15)$$

Para encontrar las soluciones  $r = r(\rho)$  de esta ecuación, es rutinario colocarla en la siguiente forma

$$\frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_s r}} = \frac{d\rho}{\rho}, \quad (5.16)$$

e integrar ambos lados. El lado derecho de esta ecuación es sencillo. En cambio, para realizar la integración del lado izquierdo es necesario completar el binomio que está dentro de la raíz como  $r^2 - r_s r = \left(r - \frac{r_s}{2}\right)^2 - \frac{r_s^2}{4}$ . Luego, se efectúa el cambio de variable  $z = r - r_s/2$  y  $a = r_s/2$ , manteniendo  $dr = dz$ . Con este cambio, tendremos que el lado izquierdo de la ecuación diferencial será equivalente a  $(z^2 - a^2)^{-1/2} dz$  y entonces realizamos la sustitución elemental  $z = a \cosh(u)$ , con elemento diferencial como  $dz = a \sinh(u) du$ . De este modo, la integración de la ecuación diferencial da como resultado

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\left(r - \frac{r_s}{2}\right)^2 - \frac{r_s^2}{4}}} = \int du \quad (5.17)$$

$$= u,$$

en donde el valor de  $u$  lo extraemos de la sustitución que realizamos anteriormente,

$$u = \cosh^{-1} \frac{z}{a} \quad (5.18)$$

$$= \cosh^{-1} \left[ \frac{2}{r_s} \left( r - \frac{r_s}{2} \right) \right].$$

Simplificando esta expresión y colocando el resultado de integrar el lado derecho de la ecuación diferencial original tendremos la siguiente relación entre la coordenada radial original  $r$  y la nueva coordenada  $\rho$ :

$$\cosh^{-1} \left( \frac{2r}{r_s} - 1 \right) = \ln \rho + C \quad (5.19)$$

Procedemos a simplificar esta expresión con los siguientes pasos. Debido a que la función coseno hiperbólico es inyectiva, la ecuación (5.19) será equivalente a

$$\frac{2r}{r_s} - 1 = \cosh(\ln \rho + C) \quad (5.20)$$

$$= \cosh(\ln \kappa \rho),$$



en donde se puede usar la definición de coseno hiperbólico y la identidad  $x = e^{\ln x}$  para simplificarla:

$$\begin{aligned}\cosh(\ln \kappa \rho) &= \frac{1}{2} (e^{\ln \kappa \rho} + e^{-\ln \kappa \rho}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \kappa \rho + \frac{1}{\kappa \rho} \right).\end{aligned}\tag{5.21}$$

Esta ecuación será equivalente a

$$\frac{\kappa^2 \rho^2 + 1}{2\kappa \rho} = \frac{2r}{r_s} - 1,\tag{5.22}$$

la cual se continuará simplificando mediante el despeje parcial de  $r$

$$\frac{2r}{r_s} = \frac{(\kappa \rho + 1)^2}{2\kappa \rho}.\tag{5.23}$$

A continuación, imponemos la condición de que  $\rho = r$  en el límite en que  $\rho \rightarrow \infty$ , pues ambas son coordenadas radiales en un sistema coordenado con simetría esférica

$$\frac{2r}{r_s} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{(\kappa \rho + 1)^2}{2\kappa \rho},\tag{5.24}$$

en donde el lado derecho tenderá a  $\frac{\kappa r}{2}$  en dicho límite. Por lo tanto, el valor de la constante  $\kappa$  se lee de la siguiente ecuación,

$$\frac{2r}{r_s} = \frac{\kappa r}{2},\tag{5.25}$$

dando como resultado  $\kappa = 4/r_s = 2/M$ . Regresamos a la ecuación (5.23), en donde sustituiremos el nuevo valor de  $\kappa$  para obtener la relación directa entre las dos coordenadas radiales,

$$\frac{2r}{r_s} = \frac{\left(\frac{2\rho}{M} + 1\right)^2}{\frac{4}{M}\rho},\tag{5.26}$$

para finalmente despejar  $r$  como

$$r = \rho \left( 1 + \frac{M}{2\rho} \right)^2. \quad (5.27)$$

Recordemos que  $r = \zeta\rho$ , de donde obtenemos una expresión para  $\zeta$ :

$$\zeta = \left( 1 + \frac{M}{2\rho} \right)^2. \quad (5.28)$$

Como próximo paso, calcularemos el término  $1 - 2M/r$  para sustituirlo en la métrica original de Schwarzschild, a través de los siguientes pasos: Sustituimos el valor de  $r$  obtenido en (5.27) en el término  $1 - 2M/r$ :

$$1 - \frac{2M}{r} = \frac{\rho \left( 1 + \frac{M}{2\rho} \right)^2 - 2M}{\rho \left( 1 + \frac{M}{2\rho} \right)^2}, \quad (5.29)$$

cuya simplificación resulta en

$$1 - \frac{2M}{r} = \frac{(2\rho - M)^2}{(2\rho + M)^2}. \quad (5.30)$$

El resultado de colocar estos valores obtenidos para  $\zeta^2$  y  $1 - 2M/r$  en la métrica original de Schwarzschild ofrece una nueva forma dada por

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{\left( 1 - \frac{2M}{r} \right)} dr^2 + r^2 d\theta + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2 \\ &= - \left( \frac{2\rho - M}{2\rho + M} \right)^2 dt^2 + \left( 1 + \frac{M}{2\rho} \right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\theta + \rho^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Estas son llamadas coordenadas isotrópicas para la métrica de Schwarzschild. Podemos obtener el valor para la nueva coordenada  $\rho$  en términos de la coordenada original  $r$  resolviendo la ecuación (5.27) para  $\rho$ . El resultado es

$$\rho = \frac{r - M \pm \sqrt{r^2 - 2Mr}}{2}, \quad (5.32)$$

de donde obtenemos el valor de  $\rho$  cuando  $r = r_s$  como

$$\rho_s = \frac{r_s}{4} \Leftrightarrow 4\rho_s = r_s, \quad (5.33)$$

con este valor es posible inspeccionar los términos que aparecen en (5.31). Notamos que en estas coordenadas el radio de Schwarzschild no representa una singularidad. Seguidamente, podemos buscar unas coordenadas que sean conformes también en el tiempo, lo cual ya fue ilustrado con las coordenadas de Kruskal-Szekeres para la métrica de Schwarzschild. Con esta información, se elaboró el diagrama de Kruskal (4.3). Sin embargo, existe un diagrama diferente al de Kruskal, llamado diagrama conforme que fue introducido en 1960 como una forma de representar visualmente diversas propiedades de agujeros negros y otras métricas. Una razón importante por la cual trabajamos con estos diagramas es que representan la estructura causal del espacio-tiempo. Esto es, la relación entre el pasado y el futuro de diferentes eventos, de la manera que son definidos gracias a los conos de luz; facilita determinar si una región del espacio-tiempo o ciertos eventos podrán ser observados. Además, en algunos casos podemos tratar el infinito como un valor finito, de tal manera que la estructura de toda nuestra variedad es descrita en forma breve. Los diagramas de Kruskal no son iguales a los diagramas conformes que se mencionan en este capítulo.

## 5.2. Diagramas de Penrose-Carter

Para elaborar un diagrama conforme de la métrica de Schwarzschild, es necesaria una transformación de coordenadas extra. Regresamos a la ecuación (4.13), en la cual se emplean las coordenadas  $v'$  y  $u'$ , las cuales son nulas. Recordemos que estas coordenadas están dadas por

$$v' = e^{v/4M}$$

$$u' = -e^{-u/4M},$$

las cuales poseen valores divergentes, pues son funciones exponenciales. Para elaborar un diagrama conforme es necesario *traer* los valores infinitos hacia valores coordenados finitos. Una elección que cumple esto es la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} v'' &= \arctan\left(\frac{v'}{\sqrt{2M}}\right) \\ u'' &= \arctan\left(\frac{u'}{\sqrt{2M}}\right), \end{aligned} \quad (5.34)$$

la cual posee los siguientes rangos,

$$-\frac{\pi}{2} < v'' < +\frac{\pi}{2}$$

y

$$-\frac{\pi}{2} < u'' < +\frac{\pi}{2}.$$

Las coordenadas  $(v'', u'')$  son conforme planas, pues están relacionadas con la métrica de Minkowski de la misma manera que (5.7). El diagrama que resulta con estas coordenadas está plasmado en la figura (5.1). Las cantidades que aparecen en este diagrama son definidas a continuación.  $i^+$  son llamados infinitos futuros tipo tiempo y son puntos que indican en dónde terminan las geodésicas tipo tiempo. Los  $i^-$  reciben el nombre de infinitos pasados tipo tiempo, también son puntos e indican en dónde inician las geodésicas tipo tiempo. Los  $i^0$  son llamados infinitos espaciales, e indican en dónde inician y terminan las geodésicas tipo espacio. Los  $\mathcal{I}^+$  son llamados infinitos nulos futuros e indican en dónde terminan las geodésicas nulas. Además, los  $\mathcal{I}^-$  son llamados infinitos nulos pasados e indican en dónde inician las geodésicas nulas. Estas dos últimas son superficies nulas. El logro de este diagrama es haber fijado todo el espacio de Schwarzschild en una pequeña pieza de papel, pero en realidad no revela mucha información extra, salvo que cuando es comparado con el diagrama conforme de Minkowski, es claro que la métrica de Schwarzschild es asin-

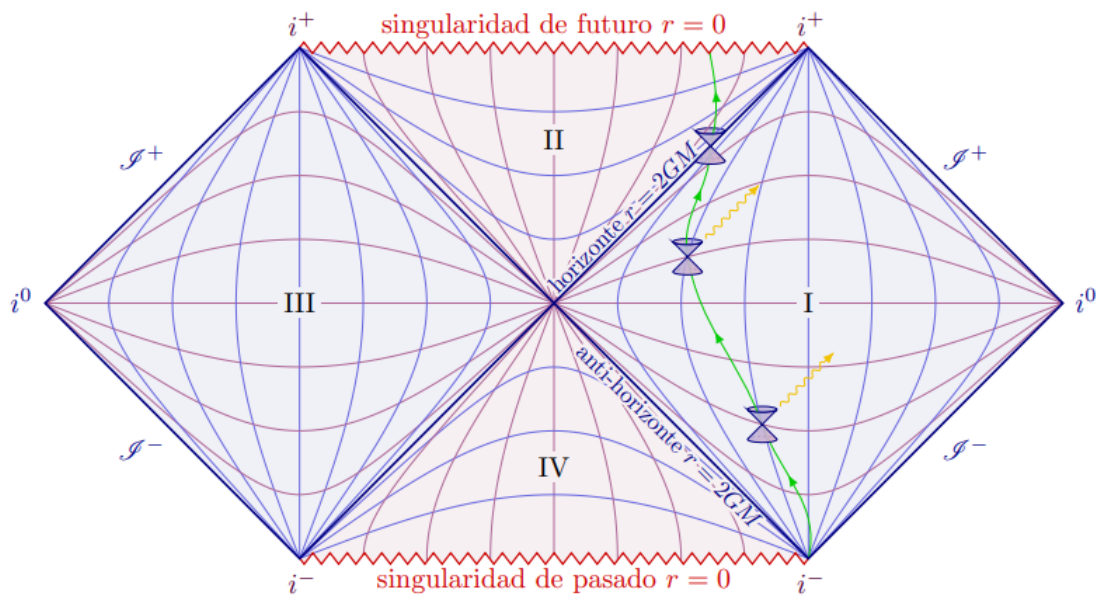


Figura 5.1: Diagrama de Penrose de la métrica de Schwarzschild que ilustra la estructura causal de esta geometría. En este, la superficie del agujero negro está representada por una línea a  $45^\circ$  y las trayectorias dentro del interior de dicha superficie conducen hacia la singularidad de  $r = 0$ . Líneas mundiales tipo tiempo permanecen a  $45^\circ$ . La cuadrícula indica líneas de  $r$  y  $t$  constantes.

tóticamente plana, pues  $\mathcal{I}^\pm$  e  $i^0$  tienen la misma estructura en ambos diagramas.

---

## Capítulo 6

# Coordenadas alternativas para métricas con simetría esférica

En el capítulo anterior, se obtuvieron coordenadas conformes en secciones de espacio a tiempo constante para la métrica de Schwarzschild, llamadas coordenadas isotrópicas. Luego, se menciona que las coordenadas de Kruskal-Szekeres que fueron trabajadas en el capítulo 4 son más generales que las isotrópicas, pues estas permiten incluir el tiempo pero descartan las secciones angulares. Sin embargo, el procedimiento para obtener estas últimas involucró diversas transformaciones de coordenadas, por lo cual es interesante explorar cómo llevar una métrica hacia una forma conforme plana empleando solamente una transformación, en lugar de usar varias.

### 6.1. Coordenadas conforme planas para métricas con simetría esférica

Existen diversas métricas que cumplen la condición  $g_{00}g_{11} = -1$  [29], estas poseen la propiedad de que su tensor de Ricci satisface la relación  $R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$ , en donde  $k^\mu = (\dot{t}, \dot{r}, 0, 0)$  es el vector tangente de una curva radial nula  $(t(\lambda), r(\lambda), 0, 0)$  para un parámetro afín  $\lambda$  y donde el *punto* indica derivada respecto a dicho  $\lambda$ . Una

métrica que satisface esta condición tendrá la siguiente forma:

$$ds_{(1)}^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2(\theta)d\phi^2, \quad (6.1)$$

la cual además posee simetría esférica y es estática. Métricas que satisfacen esta forma y que se encuentran en libros introductorios de relatividad general son las desarrolladas por Minkowski, Schwarzschild, de-Sitter, Reissner-Nordström, entre otras. Aun así, existen métricas que no son encontradas en libros clásicos, como la de Boulware-Deser [30]. Gracias a que poseen dicha simetría, es posible considerar rebanadas de espacio-tiempo a ángulos constantes,  $d\theta = d\phi = 0$ , lo cual nos permite trabajar con dos coordenadas en lugar de cuatro. El procedimiento será buscar una transformación de coordenadas que la convierta en una forma conforme plana cuando se consideran ángulos constantes:

$$ds_{(2)}^2 = \Omega^2 (-dT^2 + d\rho^2) + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2(\theta)d\phi^2. \quad (6.2)$$

La transformación que será empleada es

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial y^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial y^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \gamma_{\mu'\nu'}, \quad (6.3)$$

en donde  $x^{\mu} = (t, r, \theta, \phi)$ ,  $y^{\mu} = (T, \rho, \theta, \phi)$ ,  $g_{\mu\nu}$  son las componentes de la métrica en la forma (6.1), mientras que  $\gamma_{\mu\nu}$  corresponde a (6.2):

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\Omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Como se mencionó, en secciones de ángulos constantes estaremos ante una transformación de coordenadas entre dos métricas bidimensionales, lo cual nos permite utilizar un resultado que expone que toda variedad Lorentziana bidimensional es conforme plana. Una demostración rigurosa de esto puede encontrarse en [31]. A continuación, se trabaja esta prueba de manera más práctica. Para ello, usaremos una métrica bidimensional  $g_{\mu\nu}$  y transformaremos las coordenadas originales  $(x^0, x^1)$  hacia coordenadas nulas  $(y^{0'}, y^{1'}) = (\mathcal{U}, \mathcal{V})$ . Estas últimas satisfacen la expresión  $\mathbf{g}(\partial_{\mathcal{U}}, \partial_{\mathcal{U}}) = 0$ , donde  $\partial_{\mathcal{U}}$  es la base para cualquier vector nulo en la dirección de  $\mathcal{U}$  y, en general, cualquier vector  $\vec{A}$  se puede expresar como  $\vec{A} = A^\mu \partial_\mu$ . La versión dual en términos de la métrica inversa es  $\mathbf{g}^{-1}(d\mathcal{U}, d\mathcal{U}) = 0$ , y la expresión para uno-formas en bases de este tipo es  $\underline{a}_\gamma = a_\mu dx^\mu$ . Expresando de manera conveniente a  $d\mathcal{U}$  como  $d\mathcal{U} = (\partial\mathcal{U})/(\partial y^\sigma) dy^\sigma$  para alguna base  $dy^\sigma$ , lo cual también puede considerarse como un empleo de la típica regla de la cadena, tendremos la siguiente expresión:

$$g^{\mu\nu} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y^\mu} \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial y^\nu} = 0. \quad (6.6)$$

En las nuevas coordenadas  $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ , la métrica  $g_{\mu'\nu'}$  y su inversa  $g^{\mu'\nu'}$  se obtienen de las relaciones

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^{\nu'}} g_{\mu\nu} \quad (6.7)$$

y

$$g^{\mu'\nu'} = \frac{\partial y^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial y^{\nu'}}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu}. \quad (6.8)$$

Como ya se mencionó, cuando consideramos secciones de ángulos constantes en donde  $d\theta = 0$  y  $d\phi = 0$  sólo es necesario considerar los valores 0 y 1 de los índices



$\mu$  y  $\nu$ . Considerando  $a = 0, 1$  y  $b = 0, 1$ , escribiremos las componentes  $g^{0'0'}$  y  $g^{1'1'}$ :

$$\begin{aligned} g^{0'0'} &= \frac{\partial y^{0'}}{\partial x^a} \frac{\partial y^{0'}}{\partial x^b} g^{ab} \\ &= \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x^a} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x^b} g^{ab} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} g^{1'1'} &= \frac{\partial y^{1'}}{\partial x^a} \frac{\partial y^{1'}}{\partial x^b} g^{ab} \\ &= \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x^a} \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x^b} g^{ab} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (6.10)$$

donde podemos observar que las entradas de la diagonal de la nueva métrica  $g^{a'b'}$  son cero gracias a la ecuación (6.6), pues estamos considerando coordenadas nulas. Además, las entradas de la diagonal de su métrica inversa  $g_{a'b'}$  también son cero. Esto se obtiene gracias al siguiente proceso de bajar índices sucesivamente mediante el empleo de la relación general  $g_{a'b'} = g_{a'c} g_{b'd} g^{cd}$ . En nuestro caso, la entrada  $0'0'$  será  $g_{0'0'} = g_{0'a} g_{0'b} g^{ab}$ , sumando en los índices repetidos  $a$  y  $b$  que toman valores  $0$  y  $1$  para dar lugar a  $g_{0'0'} = 2g_{0'0'} g_{0'1'} g^{0'1'} = k g_{0'0'}$ , la cual tiene la forma  $x = nx \Rightarrow x = 0$ , por lo que tendremos que esta componente se anula. Un proceso análogo para la componente  $g_{1'1'}$  revela que también es igual a cero, de manera que el elemento de línea en las nuevas coordenadas,  $ds^2 = g_{a'b'} dx^{a'} dx^{b'}$ , tomará la forma  $ds^2 = 2g_{0'1'} dx^{0'} dx^{1'}$ , pues las entradas de la diagonal resultaron ser cero, lo cual implica que las entradas fuera de la diagonal no pueden ser cero porque la métrica no es nula. Además, puesto que la métrica original es simétrica, pues así la construimos, tendremos que la inversa también lo es. Consideremos que  $g_{0'1'}$  es positivo, de manera que podremos reescribirlo como  $2g_{0'1'} = e^{2\mathcal{C}}$ , en donde se define  $\mathcal{C} = \frac{1}{2} \ln(2g_{0'1'})$ . Con estas consideraciones, el elemento de línea se reescribirá como

$ds^2 = e^{2c} d\mathcal{U}d\mathcal{V}$ . Realizamos la siguiente transformación de coordenadas

$$\Upsilon = \frac{1}{2}(\mathcal{U} + \mathcal{V}) \quad (6.11)$$

$$\Xi = \frac{1}{2}(\mathcal{U} - \mathcal{V}), \quad (6.12)$$

cuyos diferenciales son  $d\Upsilon = (1/2)(d\mathcal{U} + d\mathcal{V})$  y  $d\Xi = (1/2)(d\mathcal{U} - d\mathcal{V})$ , respectivamente. Inspeccionamos el término  $d\Upsilon^2 - d\Xi^2$ , el cual se reduce a  $d\mathcal{U}d\mathcal{V}$ . Colocamos este resultado en el elemento de línea original, de manera que obtenemos

$$ds^2 = e^{2c} (d\Upsilon^2 - d\Xi^2), \quad (6.13)$$

el cual está en la forma deseada, pues tenemos la métrica de Minkowski con el factor conforme como  $\zeta^2 = e^{2c}$ . El caso en que  $g_{0'1'}$  es negativo resulta análogo. El resultado es que hemos transformado una métrica bidimensional general hacia una forma que es conforme plana.

Convencidos de este resultado, ejecutamos la transformación  $ds_{(1)}^2 \rightarrow ds_{(2)}^2$  descrita por la ecuación (6.3), pues considerando secciones a ángulos constantes estaremos transformando una métrica bidimensional hacia una forma conforme plana, la cual ahora sabemos que siempre existe. Consideramos las entradas  $g_{00}$ ,  $g_{01}$  y  $g_{11}$  para encontrar las ecuaciones que dirigirán hacia una expresión para  $T$ ,  $\rho$  y  $\Omega^2$  en términos de  $r$ ,  $t$  y  $f(r)$ . Comenzamos con la entrada  $g_{00}$ ,

$$g_{00} = \frac{\partial y^{\mu'}}{\partial x^0} \frac{\partial y^{\nu'}}{\partial x^0} \gamma_{\mu'\nu'}, \quad (6.14)$$

donde  $g_{00} = -f$  para la métrica original, mientras que en el lado derecho solo habrán componentes para  $\mu = \nu$ , pues ambas métricas son diagonales (ver 6.4 y 6.5):

$$-f = -\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 \Omega^2 + \Omega^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)^2. \quad (6.15)$$

Esta ecuación se reescribirá de la siguiente manera,

$$(\partial_t T)^2 = (\partial_t \rho)^2 + f \Omega^{-2}. \quad (6.16)$$

Por otro lado, la ecuación que se obtiene al considerar la entrada  $g_{11}$  es

$$\frac{1}{f} = - \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 \Omega^2 + \Omega^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2, \quad (6.17)$$

reescrita como

$$(\partial_r T)^2 = (\partial_r \rho)^2 - \frac{1}{f \Omega^2}, \quad (6.18)$$

mientras que la transformación de la entrada  $g_{01}$  resulta en la siguiente expresión:

$$\partial_t T \partial_r T = \partial_t \rho \partial_r \rho. \quad (6.19)$$

Para combinar estas ecuaciones y resolver, primero elevamos al cuadrado (6.19) y sustituimos en ella las expresiones (6.16) y (6.18), para resultar en

$$(\partial_t \rho)^2 (\partial_r \rho)^2 = [(\partial_t \rho)^2 + f \Omega^{-2}] \left[ (\partial_r \rho)^2 - \frac{1}{f \Omega^2} \right]. \quad (6.20)$$

El desarrollo de los productos de esta ecuación da como resultado

$$\frac{1}{\Omega^2} = f (\partial_r \rho)^2 - \frac{1}{f} (\partial_t \rho)^2. \quad (6.21)$$

Equivalentemente, las ecuaciones (6.16) y (6.18) pueden reescribirse como  $(\partial_t \rho)^2 = (\partial_t T)^2 - f \Omega^{-2}$  y  $(\partial_r \rho)^2 = (\partial_r T)^2 + f^{-1} \Omega^{-2}$ , respectivamente, cuya sustitución en el cuadrado de (6.19) dirige a una ecuación diferente para  $\Omega^{-2}$  como  $\Omega^{-2} = f^{-1} (\partial_t T)^2 - f (\partial_r T)^2$ . La expresión (6.21) ayuda a reescribir la ecuación (6.16) como

$$(\partial_t T)^2 = (\partial_t \rho)^2 + f \left[ (\partial_r \rho)^2 - \frac{1}{f} (\partial_t \rho)^2 \right], \quad (6.22)$$

la cual, a su vez, se reduce a  $(\partial_t T)^2 = f^2 (\partial_r \rho)^2$ , en la cual podemos tomar raíz de ambos lados

$$\partial_t T = f \partial_r \rho. \quad (6.23)$$

La sustitución de la expresión de  $N^{-2}$  en la ecuación (6.18) se realiza de manera análoga,

$$(\partial_r T)^2 = (\partial_r \rho)^2 - \frac{1}{f} \left[ (\partial_r \rho)^2 - \frac{1}{f} (\partial_t \rho)^2 \right], \quad (6.24)$$

la cual se reduce a

$$\partial_r T = \frac{1}{f} \partial_t \rho. \quad (6.25)$$

Para resolver estas ecuaciones diferenciales para  $T$  y  $\rho$  se emplea el método de separación de variables, el cual se puede usar cuando las ecuaciones diferenciales parciales son lineales,

$$T(t, r) = \Theta(t) \Phi(r) \quad (6.26)$$

$$\rho(t, r) = \xi(t) \chi(r), \quad (6.27)$$

como resultado las ecuaciones (6.23) y (6.25) tomarán las formas

$$\Phi \partial_t \Theta = f \xi \partial_r \chi \quad (6.28)$$

y

$$\Theta \partial_r \Phi = \frac{\chi}{f} \partial_t \xi, \quad (6.29)$$

respectivamente. Luego, estas dos ecuaciones se reescriben de manera conveniente como

$$\frac{1}{\xi} \partial_t \Theta = \frac{f}{\Phi} \partial_r \chi \quad (6.30)$$

$$\frac{1}{\Theta} \partial_t \xi = \frac{f}{\chi} \partial_r \Phi, \quad (6.31)$$

en donde hemos reordenado de manera que en un lado de la ecuación tenemos dependencia en la variable  $t$ , mientras que en el otro lado es en la variable  $r$ . Esto

implica que ambos lados de la ecuación deben ser igual a una constante:

$$\frac{1}{\xi} \partial_t \Theta = \alpha = \frac{f}{\Phi} \partial_r \chi \quad (6.32)$$

$$\frac{1}{\Theta} \partial_t \xi = \beta = \frac{f}{\chi} \partial_r \Phi, \quad (6.33)$$

las cuales pueden combinarse para obtener otro conjunto de ecuaciones diferenciales equivalente. Por ejemplo, si se elige derivar (6.32) respecto de  $t$ , la ecuación resultante será

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} = \alpha \frac{d\xi}{dt}, \quad (6.34)$$

la cual puede combinarse con (6.33) para obtener una ecuación diferencial únicamente en la función  $\Theta(t)$

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} - \alpha \beta \Theta = 0. \quad (6.35)$$

Equivalentemente, puede obtenerse la ecuación diferencial para la función  $\xi$  como  $(d^2 \xi / dt^2) - \alpha \beta \xi = 0$ . Las ecuaciones diferenciales para las funciones  $\Theta$  y  $\xi$  son sencillas de resolver, contrario a las ecuaciones resultantes para las funciones  $\chi$  y  $\Phi$ . Por ejemplo, si se elige derivar el lado derecho de (6.32) y sustituirlo en (6.33), se obtiene la siguiente ecuación para  $\chi$ :

$$f \frac{d^2 \chi}{dr^2} + \frac{d\chi}{dr} \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \frac{\alpha \beta}{f} \chi = 0. \quad (6.36)$$

Por otro lado, calcular el cociente entre los lados derechos de las ecuaciones (6.33) y (6.32) da como resultado la siguiente relación

$$\alpha \Phi \frac{d\Phi}{dr} = \beta \chi \frac{d\chi}{dr}, \quad (6.37)$$

la cual se puede integrar para resultar en la siguiente relación auxiliar:

$$\alpha \Phi^2 - \beta \chi^2 = \sigma_1, \quad (6.38)$$

donde  $\sigma_1$  es una constante de integración por determinar. Análogamente se puede obtener una relación entre las funciones  $\Theta$  y  $\Phi$  dada por  $\alpha\xi^2 - \beta\Theta^2 = \sigma_2$ . Para resolver la ecuación (6.35) es necesario determinar el signo del producto  $\alpha\beta$ , de manera que evaluaremos los distintos signos de este producto.

## 6.2. Coordenadas pulsantes

El primer caso que se analiza es  $\alpha\beta < 0$ . Para ello, regresamos a la ecuación (6.35), en la cual vamos a definir  $\omega^2 = -\alpha\beta$  o equivalentemente  $\omega = \sqrt{|\alpha\beta|} > 0$ , de manera que esta se reescribe como

$$\frac{d^2\Theta}{dt^2} + \omega^2\Theta = 0, \quad (6.39)$$

cuyas soluciones son  $\Theta = B_1 \sin(\omega t + \phi_0)$ . El ángulo de fase puede fijarse a cero,  $\phi_0 = 0$ , para que cuando  $t = 0$ , también se cumpla  $T = 0$ , o puede elegirse como  $\phi_0 = \pi/2$ , en cuyo caso la forma de  $\Theta$  será como un coseno en lugar de seno. La forma de  $\xi$  puede obtenerse resolviendo la ecuación (6.33) para  $\xi$ . La solución es inmediata dado que la función  $\Theta$  es una función trigonométrica, el resultado es  $\xi = B_2 \cos(\omega t + \phi_0)$ . Podemos obtener una relación entre las constantes  $B_1$  y  $B_2$  con una serie de pasos. Primero se calcula la derivada de  $\Theta$ ,  $d\Theta/dt = B_1\omega \cos(\omega t + \phi_0) = B_1\omega\xi/B_2$  y retomamos la ecuación (6.32) para obtener  $B_1\omega\xi/B_2 = \alpha\xi$ , de donde se extrae la siguiente relación

$$B_2 = B_1 \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}. \quad (6.40)$$

Además, si sustituimos la forma de  $\Theta$  y  $\xi$  en la expresión  $\alpha\xi^2 - \beta\Theta^2 = \sigma_2$  obtenemos la relación  $\sigma_2 = -\beta B_1^2$ . Por otro lado, partiendo de la ecuación (6.33) podemos obtener expresiones para  $\Phi$  y  $\chi$ . Reescribimos esta ecuación de la siguiente manera,

$$\frac{f}{\chi} \frac{d\Phi}{dr} = \beta \Rightarrow \chi = \frac{f}{\beta} \frac{d\Phi}{dr}, \quad (6.41)$$

y manipulamos la ecuación (6.38), en donde elegiremos  $\alpha > 0$  y  $\beta < 0$  de modo que  $\sigma_1 > 0$  y  $\sigma_2 > 0$ , la cual reescribimos como

$$\chi^2 = \frac{-\sigma_1 + \alpha\Phi^2}{\beta}, \quad (6.42)$$

y combinamos (6.41) con (6.42):

$$\frac{f}{\beta} \frac{d\Phi}{dr} = \sqrt{\frac{-\sigma_1 + \alpha\Phi^2}{\beta}}. \quad (6.43)$$

Esta es una ecuación diferencial separable que se reescribe de la siguiente manera

$$\frac{d\Phi}{\sqrt{\sigma_1 - \alpha\Phi^2}} = \sqrt{-\beta} \frac{dr}{f}, \quad (6.44)$$

y se encuentran las soluciones  $\Phi$  mediante la integración de ambos lados:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \arcsen \left( \sqrt{\frac{\alpha}{\sigma_1}} \Phi \right) = \sqrt{-\beta} \int \frac{dr}{f}. \quad (6.45)$$

Recordemos que estamos buscando una expresión para  $\Phi$ , por lo cual reescribimos esta ecuación como

$$\Phi = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\alpha}} \text{sen} \left( \sqrt{-\alpha\beta} \int \frac{dr}{f} \right). \quad (6.46)$$

Podemos obtener una expresión para  $\chi$  partiendo de la ecuación (6.42)

$$\chi = \sqrt{\frac{-\sigma_1 + \alpha\Phi^2}{\beta}} \quad (6.47)$$

y sustituyendo en ella la expresión obtenida para  $\Phi(r)$  en (6.46)

$$\chi = \sqrt{\frac{\sigma_1}{-\beta}} \cos \left( \sqrt{-\alpha\beta} \int \frac{dr}{f} \right). \quad (6.48)$$

Finalmente, las expresiones para  $T(t, r)$  y  $\rho(t, r)$  se obtienen sustituyendo los resultados obtenidos para  $\Theta$ ,  $\xi$ ,  $\chi$  y  $\Phi$  en (6.26) y (6.27):

$$T(t, r) = \frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\omega} \operatorname{sen} \left( \omega \int \frac{dr}{f} \right) \operatorname{sen} (\omega t + \phi_0) \quad (6.49)$$

$$\rho(t, r) = \frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\omega} \operatorname{cos} \left( \omega \int \frac{dr}{f} \right) \operatorname{cos} (\omega t + \phi_0), \quad (6.50)$$

en donde hemos usado la definición previa de  $\omega = \sqrt{-\alpha\beta}$ . Podemos continuar el proceso mediante el cálculo del factor  $1/\Omega^2$  en la ecuación (6.21),

$$\frac{1}{\Omega^2} = f (\partial_r \rho)^2 - \frac{1}{f} (\partial_t \rho)^2, \quad (6.51)$$

en donde debemos obtener una expresión para  $\partial_r \rho$  y  $\partial_t \rho$ . Para el primero de estos tendremos:

$$\partial_r \rho = \frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{\omega} \frac{\partial}{\partial r} \left[ \operatorname{cos} \left( \omega \int \frac{dr}{f} \right) \operatorname{cos} (\omega t + \phi_0) \right], \quad (6.52)$$

usando regla de la cadena y notando la siguiente relación,

$$\frac{d}{dr} \left( \int \frac{dr}{f} \right) = \frac{1}{f}, \quad (6.53)$$

entonces la ecuación (6.52) resulta en la siguiente expresión:

$$\partial_r \rho = -\frac{\sqrt{\sigma_1 \sigma_2}}{f} \operatorname{sen} \left( \omega \int \frac{dr}{f} \right) \operatorname{cos} (\omega t + \phi_0). \quad (6.54)$$

Así mismo, la derivada  $\partial_t \rho$  se calcula de manera análoga:

$$\partial_t \rho = -\sqrt{\sigma_1 \sigma_2} \operatorname{cos} \left( \omega \int \frac{dr}{f} \right) \operatorname{sen} (\omega t + \phi_0). \quad (6.55)$$



La sustitución de (6.63) y (6.66) en la ecuación para  $1/\Omega^2$  dirige a la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{f} [\cos^2(\omega t + \phi_0) \operatorname{sen}^2(\omega r^*) - \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi_0) \cos^2(\omega r^*)], \quad (6.56)$$

en donde se ha definido  $\int f^{-1} dr = r^*$ . La expresión (6.56) puede simplificarse mediante el uso de las identidades  $2 \operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos(2A)$  y  $2 \cos^2 A = 1 + \cos(2A)$ , de manera que el término entre corchetes de dicha ecuación equivale a

$$(1/4) [(1 - \cos(2\omega r^*)) (1 + \cos(2\omega t + \phi_0)) - (1 + \cos(2\omega r^*)) (1 - \cos(2\omega t + \phi_0))],$$

el cual es simplificado para obtener la expresión para el término  $\Omega^2$  como

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{2f} [\cos(2\omega t + 2\phi_0) - \cos(2\omega r^*)]. \quad (6.57)$$

Resumiendo, hemos obtenido las expresiones para las nuevas coordenadas  $T$  y  $\rho$  en términos de las coordenadas originales  $t$  y  $r$ . El siguiente paso es analizar estas coordenadas, pues están en términos de las funciones trigonométricas senos y cosenos, las cuales poseen un carácter oscilatorio y por lo cual se les da el nombre de coordenadas pulsantes. Para iniciar el análisis, retomamos las expresiones (6.49) y (6.50) y efectuamos la siguiente manipulación: Reescribimos las expresiones para  $T$  y  $\rho$  como

$$\frac{T}{\operatorname{sen}(\omega r^*)} = \frac{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t + \phi_0) \quad (6.58)$$

y

$$\frac{\rho}{\cos(\omega r^*)} = \frac{\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}{\omega} \cos(\omega t + \phi_0), \quad (6.59)$$

respectivamente. Luego, elevamos ambas expresiones al cuadrado y efectuamos su suma:

$$\frac{T^2}{\operatorname{sen}^2(\omega r^*)} + \frac{\rho^2}{\cos^2(\omega r^*)} = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\omega^2}, \quad (6.60)$$

en donde se ha empleado la identidad trigonométrica  $\text{sen}^2(x) + \text{cos}^2(x) = 1$  en el lado derecho, de manera que podemos obtener un diagrama que no dependa del tiempo  $t$ . Con una manipulación análoga se puede obtener una expresión que no posea dependencia en la coordenada  $r$ :

$$\frac{T^2}{\text{sen}^2(\omega t + \phi_0)} + \frac{\rho^2}{\text{cos}^2(\omega t + \phi_0)} = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\omega^2}. \quad (6.61)$$

Vale la pena mencionar que este proceso es análogo al que se lleva a cabo en el análisis de las coordenadas de Kruskal-Szekeres para la métrica de Schwarzschild (4.17), con la diferencia de que en ese caso se efectuó una resta de las expresiones una vez elevadas al cuadrado, pues se trabaja con funciones hiperbólicas que satisfacen la relación  $\text{cosh}^2(x) - \text{sinh}^2(x) = 1$ . En ese caso se obtuvieron diferentes hipérbolas para diferentes valores de la coordenada radial  $r$  y líneas rectas para diferentes valores de  $t$ , como ya se mostró en la figura (4.3). Esta vez, (6.60) y (6.61) son ecuaciones de elipses, de manera que las curvas a  $r$  o  $t$  constantes serán representadas con elipses. Recordemos que la ecuación de una elipse es de la forma

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

en donde los valores  $a$  y  $b$  son los semiejes mayor y menor. Esto significa que para nuestro caso, los semiejes tomarán valores en el conjunto  $[0, \kappa]$ , donde  $\kappa = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2} / \omega$ , lo cual indica que las elipses en un diagrama  $\rho$ - $T$  tendrán un valor máximo en sus semiejes. Dado que el valor máximo de dichos semiejes es una cantidad que depende de tres constantes  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  y  $\omega$ , se puede elegir de manera conveniente que el producto  $\sigma_1 \sigma_2$  sea igual a la unidad, para tener sólo una constante por determinar. Por otro lado, notamos que cuando uno de los semiejes toma el valor de 0, el otro tomará el valor máximo, lo cual indica que un diagrama  $\rho$ - $T$  estará compuesto de diversas elipses horizontales y verticales con distintas excentricidades  $\epsilon \in [0, 1]$  cuya dependencia en las coordenadas  $r$  o  $t$  está dada por  $\epsilon = (1 - \cot^2(\omega r^*))^{1/2}$

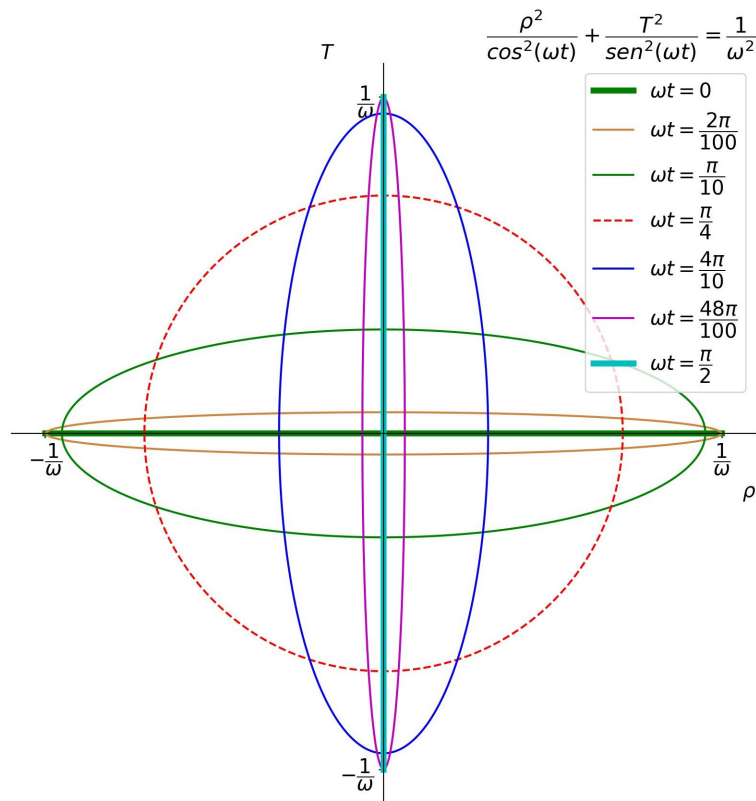


Figura 6.1: Diagrama de las coordenadas pulsantes  $\rho$ - $T$ , construido mediante la ecuación (6.61). En este, hemos considerado  $\phi_0 = 0$ . Debido a que el dominio de la coordenada  $t$  es  $(0, \infty)$ , este diagrama inicia con una línea horizontal  $T = 0$  y posteriormente se dibujan diferentes elipses horizontales y verticales, hasta llegar a una línea vertical  $\rho = 0$ .

o  $\epsilon = (1 - \cot^2(\omega t))^{1/2}$ . Esto es, tendremos elipses con anchura cero, como rectas en el caso  $\epsilon = 1$  y círculos para  $\epsilon = 0$ . El éxito de este procedimiento es que hemos compactificado una métrica de la forma (6.1) en una región pequeña descrita por elipses cuyos semiejes pueden tomar valores finitos. Por ejemplo, el diagrama correspondiente a la ecuación (6.61) está ilustrado en la figura (6.1).

### 6.2.1. Métrica de Schwarzschild

Podemos trabajar con la métrica de Schwarzschild para ilustrar los resultados y realizar una comparación con el diagrama de Kruskal (4.3) y el diagrama conforme

de dicha métrica (5.1). En este caso, vemos que  $f$  en la ecuación (6.1) será igual a  $1 - r_s/r$ . Es necesario evaluar la integral  $\int f^{-1}dr$  para obtener la expresión que aparecerá en el argumento de las funciones trigonométricas en las coordenadas  $T$  y  $\rho$ :

$$r_{Sch}^* = \int \frac{dr}{1 - \frac{r_s}{r}} = r - r_s + r_s \ln(r - r_s) + C, \quad (6.62)$$

en donde podemos elegir de manera conveniente la constante de integración  $C$  como  $-r_s \ln(r_s) + r_s + \vartheta_0$  para obtener una expresión equivalente a la coordenada  $r^*$  definida en (4.3) como la coordenada de tortoise para la métrica de Schwarzschild:  $r_{Sch}^* = r + r_s \ln\left(\frac{r}{r_s} - 1\right) + \vartheta_0$ . La elección de  $\omega\vartheta_0 = \pi/2$  invierte el rol del seno y coseno que aparecen en las funciones (6.49) y (6.50). Así, las diferentes elecciones de los ángulos iniciales  $\phi_0$  y  $\vartheta_0$  dan origen a una serie de cambios en las funciones seno y coseno, algunos de estos casos se muestran en la siguiente lista:

$$\phi_0 = 0, \vartheta_0 = 0 \implies \begin{cases} T = \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\omega r_{Sch}^*) \\ \rho = \text{cos}(\omega t) \text{cos}(\omega r_{Sch}^*) \end{cases} \quad (6.63)$$

$$\phi_0 = 0, \vartheta_0 = \frac{\pi}{2\omega} \implies \begin{cases} T = \text{sen}(\omega t) \text{cos}(\omega r_{Sch}^*) \\ \rho = -\text{cos}(\omega t) \text{sen}(\omega r_{Sch}^*) \end{cases} \quad (6.64)$$

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2\omega}, \vartheta_0 = 0 \implies \begin{cases} T = \text{cos}(\omega t) \text{sen}(\omega r_{Sch}^*) \\ \rho = -\text{sen}(\omega t) \text{cos}(\omega r_{Sch}^*) \end{cases} \quad (6.65)$$

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2\omega}, \vartheta_0 = \frac{\pi}{2\omega} \implies \begin{cases} T = \text{cos}(\omega t) \text{cos}(\omega r_{Sch}^*) \\ \rho = \text{sen}(\omega t) \text{sen}(\omega r_{Sch}^*) \end{cases} \quad (6.66)$$

Para el primero de estos casos, la ecuación de elipses es la misma que en (6.60) para un diagrama independiente del tiempo, y la misma que en (6.61) para un diagrama que sí depende del tiempo  $t$  pero que no depende de la coordenada  $r$ . La ecuación (6.57) implica que el factor conforme  $\Omega^2$  tomará un valor divergente cuan-

do  $r^* = t$  en la elección  $\phi_0 = 0$  y  $\vartheta_0 = 0$ , lo cual puede evitarse con otra elección de ángulos de fase iniciales, por ejemplo la elección (6.64) dirige al factor conforme descrito por la ecuación  $\Omega^2 = (2f/\sigma_1\sigma_2) [\cos(2\omega t) + \cos(2\omega r^*)]$ . En la figura (6.2) se muestra la gráfica de la coordenada  $r_{Sch}^*$  en función de  $r$ . Esta última tiene su dominio en el rango  $r_s < r$ , pues este es el horizonte de eventos en la métrica de Schwarzschild. A su vez, la coordenada  $r_{Sch}^*$  puede tomar cualquier valor real (ver figura 6.3). Dada la forma de la ecuación de elipses (6.60), vemos que los valores de los semiejes cuando se elige  $\sigma_1\sigma_2 = 1$  están dados por  $a = |(1/\omega) \text{sen}(\omega r_{Sch}^*)|$  y  $b = |(1/\omega) \text{cos}(\omega r_{Sch}^*)|$ , lo cual significa que el argumento de estas dos funciones trigonométricas es todo  $\mathbb{R}$ , por lo que la magnitud de los semiejes cambiará continuamente (ver figura 6.4). El resultado es un diagrama  $\rho$ - $T$  compuesto por infinitas y repetitivas elipses. Podemos considerar valores particulares, como el de  $r_{Sch}^* = 0$ , el cual implicará  $a = 0$  y  $b = 1/\omega$ , lo que corresponde a una elipse con grosor cero, es decir, una línea, en este caso horizontal. Los valores que satisfacen  $\omega r_{Sch}^* = \pm\pi/4$  y en general  $\omega r_{Sch}^* = \pi/4 + n\pi/2$  para  $n$  entero darán origen a círculos de radio  $1/\sqrt{2}$ . Mediante inspección, notamos que líneas horizontales corresponden a valores  $\omega r_{Sch}^* = n\pi$ , mientras que líneas verticales se dan en valores de  $\omega r_{Sch}^* = \pi/2 + n\pi$  (ver imagen 6.5). Las elipses en este diagrama poseen propiedades semejantes a las de las hipérbolas de un diagrama de Kruskal (4.3), pues cada punto corresponde a una esfera con coordenadas  $(T, \rho, \theta, \phi)$ . Así mismo, cada elipse pertenece a un valor de  $r$  o  $r_{Sch}^*$  a tiempo  $t$ . Notemos que existen puntos que forman parte de dos elipses diferentes, esto no es difícil de ver, pues recordemos que las formas de las funciones  $T$  y  $\rho$  son senos y cosenos, las cuales son funciones periódicas. Así, puntos  $(T, \rho)$  de este diagrama corresponden a infinitos valores de  $r$  y  $r_{Sch}^*$ , por lo cual el extenso espacio-tiempo descrito por la métrica original de Schwarzschild se ha compactificado y se ha plasmado en un pequeño plano, aunque el problema del horizonte de eventos no ha sido enfrentado, pues cuando la coordenada radial  $r$  se acerca a  $r_s$ , las magnitudes de los semiejes oscilan con mayor frecuencia.

El análisis del diagrama generado por la ecuación (6.61) para  $\phi_0 = 0$  obtenido

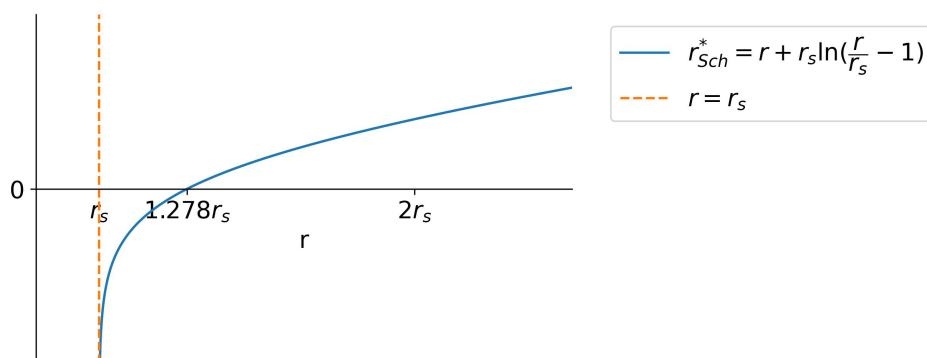


Figura 6.2: Gráfica de la función  $r_{Sch}^* = r + r_s \ln\left(\frac{r}{r_s} - 1\right)$  como función de  $r$ . La coordenada  $r$  puede tomar valores en el conjunto  $(r_s, \infty)$ , mientras que el rango de la coordenada  $r_{Sch}^*$  es  $\mathbb{R}$ . Adicionalmente, la coordenada  $r_{Sch}^*$  es cero cuando  $r \approx 1.27846r_s$ .

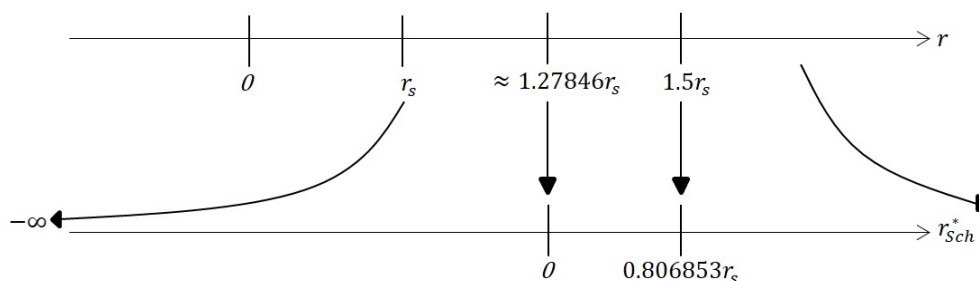


Figura 6.3: Relación entre los dominios y algunos valores de interés de las coordenadas  $r$  y  $r_{Sch}^*$ . La coordenada original tiene su dominio en la región  $r_s < r$ , mientras que  $r_{Sch}^*$  puede tomar cualquier valor en el conjunto  $(-\infty, +\infty)$ . Se logra observar que el valor  $r_s$  corresponde a un valor divergente en la coordenada de tortoise, mientras que el cero de esta se encuentra en el valor aproximado de  $1.27846r_s$ , cuyo valor exacto está dado por  $(W(e^{-1}) + 1)r_s$ , donde  $W$  es la función de Lambert definida como auxiliar en la solución de ecuaciones del tipo  $we^w = z$ . En este bosquejo destaca el hecho de que la *pequeña* región  $(r_s, 1.27846r_s)$  en la coordenada  $r$  se ha mapeado a una región no acotada  $(-\infty, 0)$  en la coordenada  $r_{Sch}^*$ .

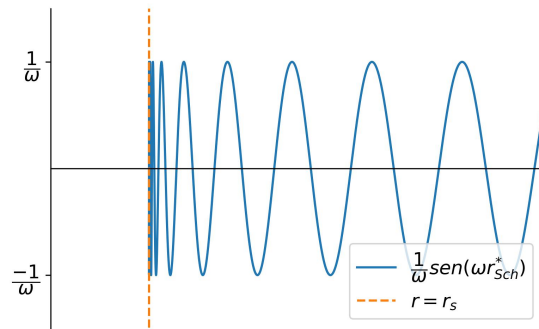


Figura 6.4: Gráfica de la función  $\frac{1}{\omega} \text{sen}(\omega r_{Sch}^*)$  como función de  $r$ . Esta muestra el comportamiento que tienen los valores del semieje  $a$  de las elipses generadas por la ecuación (6.60) para el caso en que se elige  $\sigma_1\sigma_2 = 1$ . Se aprecia la oscilación continua y acelerada alrededor de 0 para valores de  $r$  cercanos a  $r_s$ . La función  $\frac{1}{\omega} \text{cos}(\omega r_{Sch}^*)$  se comporta de la misma manera, salvo por un desfase de  $\pi/2$ .

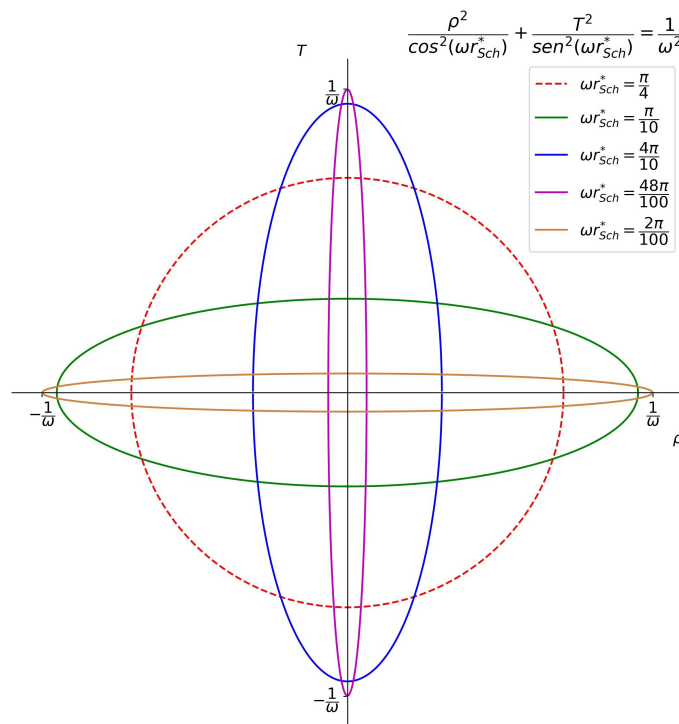


Figura 6.5: Breve bosquejo de las elipses generadas por la ecuación  $\frac{\rho^2}{\cos^2(\omega r_{Sch}^*)} + \frac{T^2}{\text{sen}^2(\omega r_{Sch}^*)} = \frac{1}{\omega^2}$ . Se muestran algunos valores para el argumento  $\omega r_{Sch}^2$  y se indica que la posición de los conos de luz es la misma que en el plano original  $(t, r)$ , pues las nuevas coordenadas  $(T, \rho)$  son conforme planas y preservan ángulos. En este no aparece la superficie  $r = r_s$ , pues no se ha conseguido una extensión más allá del horizonte de eventos del agujero negro de Schwarzschild 4.3.

en (6.1) es consistente con los valores mencionados en el párrafo anterior para líneas horizontales y verticales. En este caso, cada elipse corresponde a un tiempo  $t$  determinado y a cualquier posición  $r$ . Así mismo, los diferentes casos de  $\phi_0$  y  $\vartheta_0$  solamente ocasionan un desfase en los diagramas.

### 6.2.2. Espacio de de-Sitter

El espacio de de-Sitter es otra métrica que también satisface la forma (6.1), en cuyo caso la función  $f$  está dada por  $1 - \Gamma r^2$ , donde  $\Gamma = \Lambda/3$  en la ecuación (3.3). Es necesario calcular la integral  $\int f^{-1} dr$  para encontrar la coordenada  $r_{dS}^*$ :

$$r_{dS}^* = \int \frac{dr}{1 - \Gamma r^2} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \tanh^{-1}(\sqrt{\Gamma}r) + \vartheta_0. \quad (6.67)$$

En la figura (6.6) se muestra que esta coordenada puede tomar cualquier valor positivo en los números reales  $\mathbb{R}$ , por lo cual tenemos un mapeo del conjunto  $(0, 1/\sqrt{\Gamma})$  de  $r$  hacia el conjunto  $(0, \infty)$  de  $r_{dS}^*$ . Recordemos que se están empleando coordenadas estáticas para la métrica de de-Sitter, en las cuales se considera un observador en el centro del universo. A medida que la coordenada  $r$  se acerca hacia el horizonte de eventos dado por  $1/\sqrt{\Gamma}$ , la coordenada  $r_{dS}^*$  continua creciendo, pues este punto se ha enviado a un valor divergente positivo, análogo a lo que sucede con el horizonte de eventos  $r_s$  en la métrica de Schwarzschild, el cual es enviado a un valor divergente negativo en la nueva coordenada  $r_{Sch}^*$ . Sobremanera, en esta métrica se pueden generar los diferentes casos que están enlistados en las ecuaciones (6.63) a (6.66) de manera análoga, con el único cambio de  $r_{Sch}^*$  por  $r_{dS}^*$ . Por tanto, se ilustrará el diagrama para el primero de estos casos, pues el análisis de los demás es similar y no revela información adicional. En la figura (6.7) se ilustra el comportamiento de la función  $\omega^{-1} \text{sen}(\omega r_{dS}^*)$ , mientras que el de  $\omega^{-1} \text{cos}(\omega r_{dS}^*)$  es el mismo, solamente desfasado en un ángulo de  $\pi/2$ . El diagrama  $\rho$ - $T$  para la métrica de de-Sitter será parecido al que fue obtenido para Schwarzschild, con la diferencia de que en este



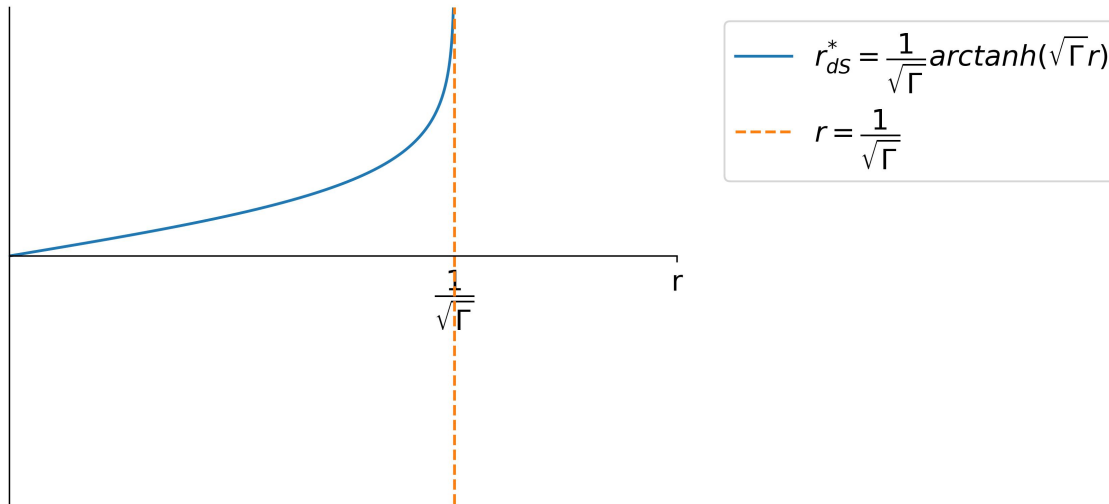


Figura 6.6: Gráfica de la función  $r_{ds}^* = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \tanh^{-1}(\sqrt{\Gamma} r)$ , en donde se aprecia que el rango de esta es todo el conjunto  $\mathbb{R}$ . Sin embargo, la coordenada  $r$  solo puede tomar valores positivos, es por ello que el rango real de esta coordenada será  $(0, \infty)$ . Las líneas verticales indican la posición del horizonte cosmológico real  $1/\sqrt{\Gamma}$  y su contraparte negativa carente de significado físico.

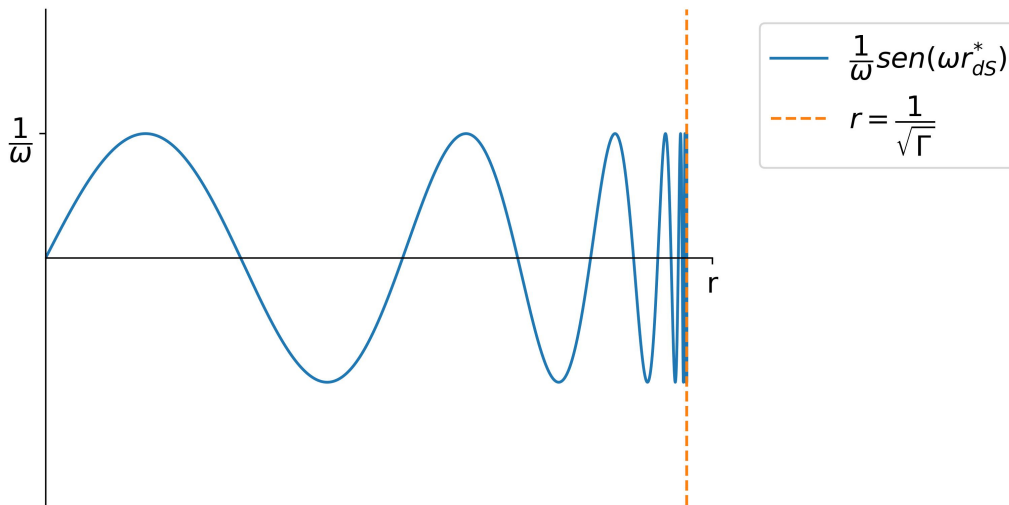


Figura 6.7: Gráfica de la función  $\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{\sqrt{\Gamma}} \tanh^{-1}(\sqrt{\Gamma} r)\right)$ . Se muestran valores para  $r < 0$ , aunque solamente los valores para  $r > 0$  tienen significado físico. La ilustración revela que el valor del semieje  $a$  oscila más rápido en valores de  $r$  cercanos al horizonte cosmológico. El semieje  $b$  se comporta de la misma manera, salvo un desfase de  $\pi/2$ .

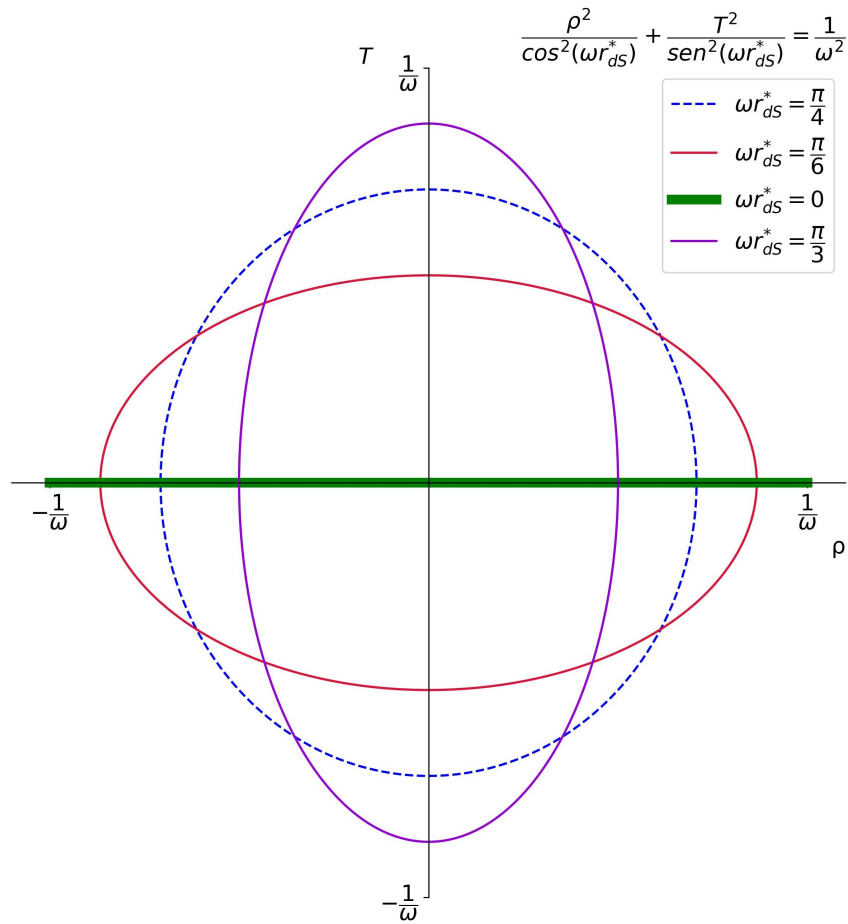


Figura 6.8: Diagrama  $\rho$ - $T$  para la métrica de de-Sitter. Debido a que el rango de la coordenada  $r_{dS}^*$  es  $(0, \infty)$ , este comienza con una línea horizontal seguida de oscilaciones bajo un periodo de  $\pi/\omega$ . Líneas verticales corresponden a valores de la forma  $\omega r_{dS}^* = \frac{\pi}{2} + n\pi$ . Análogamente, líneas horizontales corresponden a valores  $r_{dS}^* = n\pi/\omega$ .

caso la coordenada  $r_{dS}^*$  posee el rango  $(0, \infty)$ , mientras que el de  $r_{Sch}^*$  es  $(-\infty, +\infty)$ . Por lo tanto, con las elecciones de  $\phi_0 = 0$  y  $\vartheta_0 = 0$ , nuestro diagrama comienza con una línea horizontal y posteriormente las elipses oscilan a medida que  $r$  crece y se aproxima al horizonte cosmológico  $1/\sqrt{\Gamma}$ , a un ritmo acelerado en valores cercanos a este (ver figura 6.8). Nótese que este análisis fue llevado a cabo considerando una métrica cuya entrada  $-g_{00}$  es de la forma  $1 - \Gamma r^2$ . Como se mencionó en los párrafos que siguen la ecuación (3.35), esta forma también es satisfecha por los universos de Lanczos.

### 6.2.3. Espacio de Anti-de-Sitter compactificado

Anteriormente encontramos que el dominio de la coordenada  $r_{Sch}^*$  es  $\mathbb{R}$ , mientras que el de  $r_{dS}^*$  es  $(0, \infty)$ . A continuación, obtendremos la coordenada  $r_{AdS}^*$  para la métrica de Anti-de-Sitter como la integral

$$r_{AdS}^* = \int \frac{dr}{1 + \Gamma r^2}, \quad (6.68)$$

en donde vemos que no existe horizonte cosmológico, pues  $r$  tomaría un valor imaginario de la forma  $\pm i/\sqrt{\Gamma}$  carente de significado físico. El resultado es  $r_{AdS}^* = (1/\sqrt{\Gamma}) \tan^{-1}(\sqrt{\Gamma}r)$ , cuya gráfica se muestra en la figura (6.9). En esta, podemos apreciar que se ha mapeado la región  $[0, \infty)$  de  $r$  hacia  $[0, \omega\pi/2\sqrt{\Gamma})$ . Esto es, la coordenada  $r_{AdS}^*$  cumple un papel opuesto al de la coordenada de tortoise para la métrica de Schwarzschild, consecuencia directa de la escasez de horizontes de eventos y singularidades en el espacio de Anti-de-Sitter. Para realizar el diagrama  $\rho$ - $T$  de las elipses generadas para esta métrica es útil considerar dos casos: (i)  $\omega = \sqrt{\Gamma}$ , en cuyo caso tendremos  $r_{AdS}^* = \text{sen} \left[ \tan^{-1}(\sqrt{\Gamma}r) \right]$ ; (ii)  $\omega/\sqrt{\Gamma} \gg 1$ . En la figura (6.10) se muestran estos dos casos. En el primero de ellos se aprecia que la función  $\text{sen} \left[ \tan^{-1}(\sqrt{\Gamma}r) \right]$  toma un valor inicial 0 para  $r = 0$  y un valor límite  $\pi/2$  cuando la coordenada radial continúa creciendo hacia infinito. Como consecuencia de esto, los valores de los semiejes  $a$  y  $b$  en el diagrama  $\rho$ - $T$  no se repetirán: Este iniciará con una línea horizontal correspondiente a  $r = 0$ , alcanzará un círculo cuando  $r = 1/\sqrt{\Gamma}$  y se aproximará asintóticamente a una línea vertical en el límite  $r \rightarrow \infty$ , dando origen a un diagrama sin elipses repetidas y sin oscilaciones de ningún tipo. En el segundo de estos casos, la gráfica (6.10) muestra que ocurrirán oscilaciones en los valores de los semiejes  $a$  y  $b$ , por lo que tendremos un diagrama del mismo tipo que fue obtenido para la métrica de de-Sitter; iniciando en una línea horizontal para  $r = 0$  y mostrando diversas elipses a medida que  $r$  crece. El caso (i) es de especial interés y es ilustrado en la figura (6.11). Cuando  $r$  crece de manera divergente, este diagrama se acerca asintóticamente hacia una línea vertical, la cual corresponde a  $\rho = 0$

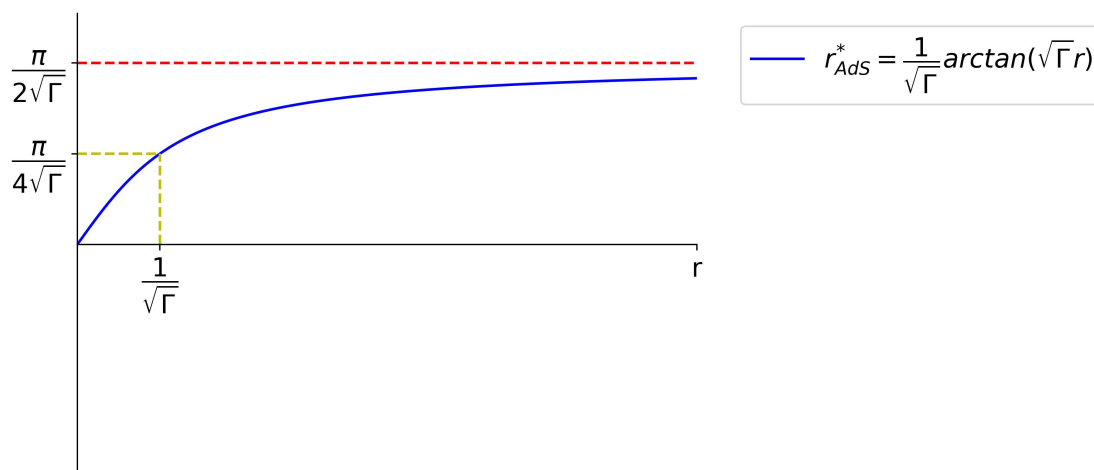


Figura 6.9: Gráfica de la función  $r_{AdS}^* = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \tan^{-1}(\sqrt{\Gamma}r)$ . El dominio de esta función es  $\mathbb{R}$ , aunque debe mencionarse que la coordenada  $r$  solo puede tomar valores en el intervalo  $[0, \infty)$ , por este motivo la región  $r < 0$  es señalada con líneas discontinuas. El rango de esta función es  $(-\pi/2\sqrt{\Gamma}, \pi/2\sqrt{\Gamma})$ , aunque se restringirá este rango a  $(0, \pi/2\sqrt{\Gamma})$ , pues solamente los valores  $r > 0$  poseen significado físico. Cuando  $r = 1/\sqrt{\Gamma}$ , se tendrá  $\tan^{-1}(1) = \pi/4$ , el cual satisface  $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4)$ .

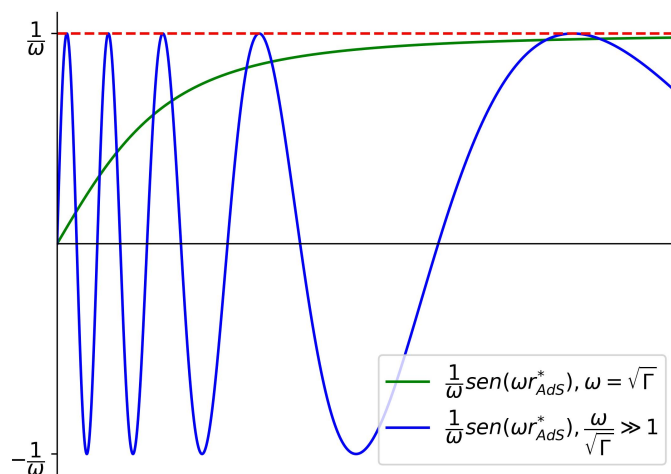


Figura 6.10: Gráfica de  $\omega^{-1} \sin(\omega r_{AdS}^*)$  para dos casos de interés:  $\omega = \sqrt{\Gamma}$  y  $(\omega/\sqrt{\Gamma}) \gg 1$ . El primero de estos casos revela que la función posee una correspondencia uno-a-uno con el conjunto  $(0, \pi/2)$ . En el segundo caso se aprecia el comportamiento usual de una función trigonométrica  $\sin(x)$ .

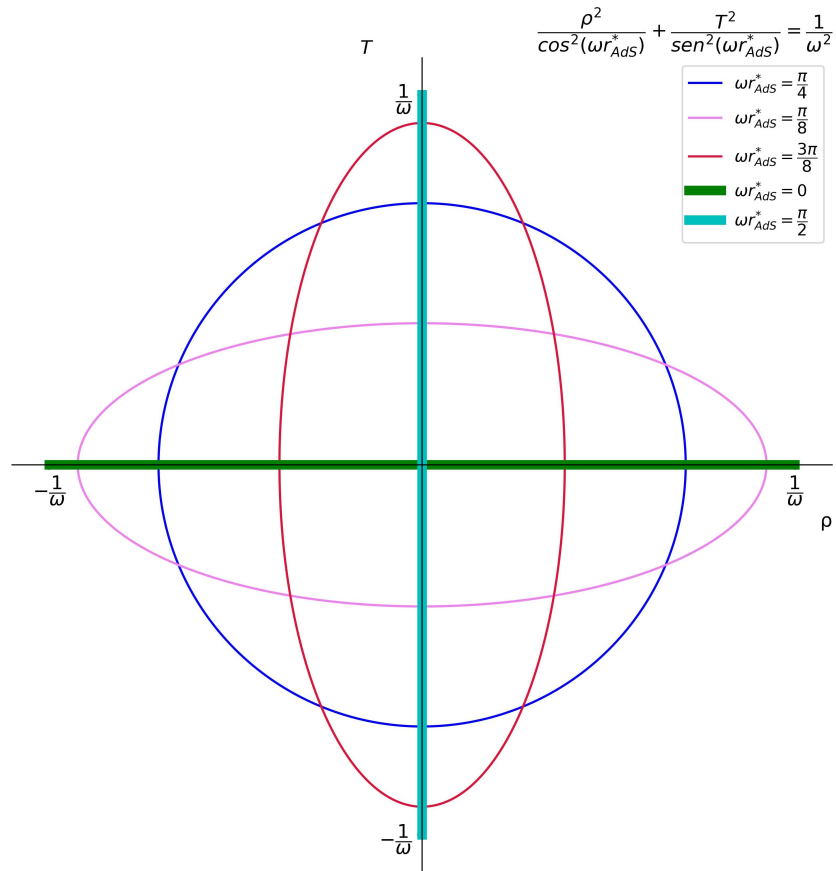


Figura 6.11: Representación del espacio-tiempo de Anti-de-Sitter en las coordenadas  $\rho$  y  $T$  obtenidas. En el caso  $\omega = \sqrt{\Gamma}$  este diagrama es más breve que los obtenido para las métricas de Schwarzschild y de-Sitter, pues inicia con una línea horizontal, presenta diversas elipses y se aproxima asintóticamente a una línea vertical cuando  $r \rightarrow \Gamma^{-1/2}$ .

cuando elegimos  $\phi_0 = \vartheta_0 = 0$ , o podría corresponder a  $T = 0$  con otra elección de estos ángulos de fase.

### 6.2.4. Agujero negro cargado

La métrica de Reissner-Nordström describe la región alrededor de un objeto simétricamente esférico con masa y carga eléctrica, el cual podría ser un agujero negro. Esta tiene muchas aplicaciones en astrofísica y relatividad general, pues ayuda a describir la evolución e interacción de estos objetos con otros cuerpos del

universo, así como su estructura interna. Esta métrica satisface la forma (6.1) con  $f(r) = 1 - r_s/r + Q^2/r^2$  y posee dos horizontes de sucesos. La coordenada de tortoise  $r_{RN}^*$  se obtiene por medio de la integral usual como

$$r_{RN}^* = \int \frac{dr}{1 - \frac{r_s}{r} + \frac{Q^2}{r^2}}, \quad (6.69)$$

y se reescribe como

$$\int \frac{r^2 dr}{r^2 - r_s r + Q^2} = \int \frac{r^2 dr}{(r - r_+)(r - r_-)}, \quad (6.70)$$

en donde los horizontes están dados por  $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ . La integral es directa una vez que se emplea el método de fracciones parciales:

$$r_{RN}^* = \int \frac{r dr}{2} \left( \frac{1}{r - r_-} + \frac{1}{r - r_+} \right) + \int \left( \frac{c_1}{r - r_-} + \frac{c_2}{r - r_+} \right) dr \quad (6.71)$$

para  $c_1 = (1/2)(r_+ + r_-)[(r_+/r_-) - 1]^{-1}$  y  $c_2 = (1/2)(r_+ + r_-)[1 - (r_-/r_+)]^{-1}$ . La primera integral hace uso de la coordenada de tortoise que fue llevada a cabo para la métrica de Schwarzschild en (6.62) y la segunda integral es directa de  $\int (dx/x) = \ln(x)$ . El resultado es plasmado a continuación:

$$r_{RN}^* = r + \frac{1}{2\sqrt{M^2 - Q^2}} \left[ r_+^2 \ln \left( \frac{r}{r_+} - 1 \right) - r_-^2 \ln \left( \frac{r}{r_-} - 1 \right) \right]. \quad (6.72)$$

La gráfica de la función  $r_{RN}^*$  se muestra en la figura (6.12), en la cual se aprecia que esta coordenada mapea la región  $(r_+, \infty)$  hacia  $(-\infty, +\infty)$ . Este dominio es el mismo que se obtiene para la coordenada  $r_{Sch}^*$  de Schwarzschild, por lo que el diagrama de esta métrica en las nuevas coordenadas  $\rho$  y  $T$  será idéntico para estos dos, aunque la dinámica de la métrica continúa siendo diferente.

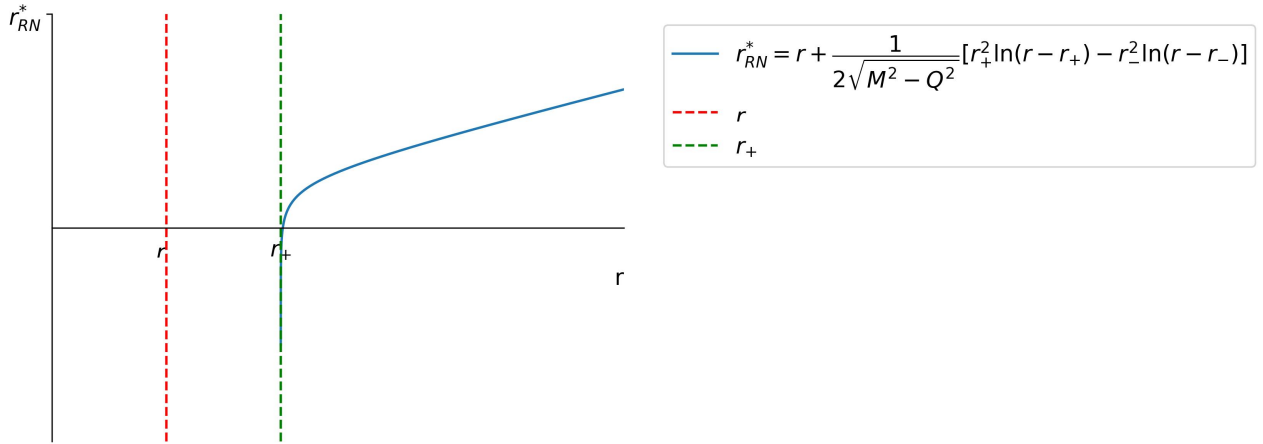


Figura 6.12: Comportamiento de la coordenada de tortoise para la métrica de Reissner-Nordström. En este caso se mapea la región  $(r_+, \infty)$  hacia  $(-\infty, +\infty)$ .

### 6.2.5. Un caso especial: Schwarzschild-de-Sitter

Es posible aplicar los resultados a la métrica de Schwarzschild-de-Sitter [32], cuya forma es

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r} - \Gamma r^2\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{r_s}{r} - \Gamma r^2\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2, \quad (6.73)$$

en donde  $3\Gamma = \Lambda$ . Esta también satisface la forma (6.1). Notemos que existen dos horizontes, uno asociado con un agujero negro y el otro con una expansión universal asociada a la constante cosmológica. Para explorar esta métrica empezaremos obteniendo la coordenada  $r^*$ , la cual está dada por la siguiente integral

$$r_{SdS}^* = \int \frac{dr}{1 - \frac{r_s}{r} - \Gamma r^2}. \quad (6.74)$$

Para evaluarse es necesario realizar una factorización en el denominador y emplear el método de fracciones parciales. Así, la integral tomará la forma

$$\frac{1}{-\Gamma} \int \frac{r dr}{r^3 - \frac{r}{\Gamma} + \frac{r_s}{\Gamma}} = \frac{1}{-\Gamma} \int \left( \frac{A}{r - R_S} + \frac{B}{r - R_D} + \frac{C}{r - R_3} \right) dr, \quad (6.75)$$

en donde hemos llamado  $R_S$  a la singularidad que corresponde al nuevo horizonte de eventos del agujero negro,  $R_D$  se relaciona al nuevo horizonte cosmológico asociado a la constante  $\Lambda$ , mientras que  $R_3$  es una raíz que más adelante se demuestra que carece de significado físico. Es preciso emplear el método conocido para resolver ecuaciones de tercer grado para la forma  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  en donde  $a = 0$  para nuestra métrica [33]. Esta ecuación posee tres raíces de acuerdo al teorema fundamental del álgebra; (i) una raíz real y dos complejas, (ii) tres raíces reales con al menos dos de ellas iguales y (iii) todas las raíces reales y diferentes. Para tener un horizonte de eventos y un horizonte cosmológico es necesario trabajar con el tercero de estos casos, pues la intuición dice que  $R_S < R_D$ . Aun así, es posible considerar el caso en que estos dos horizontes coincidan,  $R_S = R_D$ , en cuyo caso no existe una región estática, pues el efecto gravitacional caracterizado por el parámetro  $M = r_s/2$  causa que el horizonte cosmológico se contraiga, mientras que este último tiende a dilatar el horizonte de eventos. Para tener el caso mencionado de tres raíces reales y diferentes es necesario que se cumpla la relación  $3M\sqrt{3\Gamma} < 1$ . Es interesante obtener la relación entre estos nuevos horizontes y los parámetros originales  $r_s$  y  $\Gamma$ , así como la forma de  $R_3$ . La ecuación cúbica original debe aceptar una factorización de la forma  $r^3 - \frac{r}{\Gamma} + \frac{r_s}{\Gamma} = (r - R_S)(r - R_D)(r - R_3)$ . Al realizar el triple producto en esta relación se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-R_3 - R_S - R_D = 0 \quad (6.76)$$

$$R_D R_S + R_3 R_D + R_3 R_S = \frac{-1}{\Gamma} \quad (6.77)$$

$$-R_3 R_D R_S = \frac{r_s}{\Gamma}. \quad (6.78)$$

De la primera ecuación obtenemos que  $R_3 = -(R_D + R_S)$ , lo cual justifica que esta corresponda a una raíz sin significado físico, pues en la métrica en cuestión se tiene  $r > 0$ . Así, las otras dos raíces serán positivas y cumplirán los papeles de horizonte de eventos y horizonte cosmológico mencionados. La forma de estos dos horizon-



tes en términos de  $r_s$  y  $\Gamma$  es poco agradable visualmente, aunque existe una forma de escribirlos de manera compacta para el caso en cuestión, donde  $(27M^2\Gamma) < 1$ . Definimos  $\cos(\theta) = -\sqrt{27M\sqrt{\Gamma}}$  para  $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$  y entonces escribimos las soluciones como

$$R_D = \frac{2}{\sqrt{3\Gamma}} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \quad (6.79)$$

$$R_S = \frac{1}{\sqrt{3\Gamma}} \left[ \sqrt{3} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{3}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{3}\right) \right]. \quad (6.80)$$

Las constantes  $A$ ,  $B$  y  $C$  de (6.75) son obtenidas combinando las fracciones y resolviendo el sistema de ecuaciones lineales resultante. Las soluciones de este son  $A = -R_S[(2R_S + R_D)(R_D - R_S)]^{-1}$ ,  $B = R_D[(R_D - R_S)(2R_D + R_S)]^{-1}$  y  $C = -(R_D + R_S)[(2R_S + R_D)(2R_D + R_S)]^{-1}$ . Así, la coordenada  $r_{sds}^*$  toma la siguiente forma:

$$r_{sds}^* = -\Gamma^{-1} \ln [(r - R_S)^A (r - R_D)^B (r - R_3)^C]. \quad (6.81)$$

La gráfica de esta coordenada en función de  $r$  se muestra en la figura (6.13). Notemos que el dominio de la coordenada radial original  $r$  es mapeado de la región  $(0, R_S)$  hacia  $(R_0, -\infty)$  y de  $(R_D, \infty)$  hacia  $(-\infty, +\infty)$ , en donde  $R_0 = (-1/\Gamma) \ln [R_S^A R_D^B (R_S + R_D)^C]$ . Así, el diagrama  $\rho$ - $T$  estará compuesto de elipses de la misma manera que lo están los diagramas anteriores. En particular, las oscilaciones son más pronunciadas cerca de las posiciones  $R_S$  y  $R_D$ , pues ambos son horizontes.

### 6.3. Coordenadas de Regge-Wheeler

El próximo caso por trabajar es donde  $\alpha\beta = 0$ . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que una de estas dos constantes es cero, mientras la otra no lo es. Si consideramos  $\alpha = 0$ , el lado izquierdo de la ecuación (6.32) será igual a cero,

$$\frac{1}{\xi} \frac{d\Theta}{dt} = 0, \quad (6.82)$$

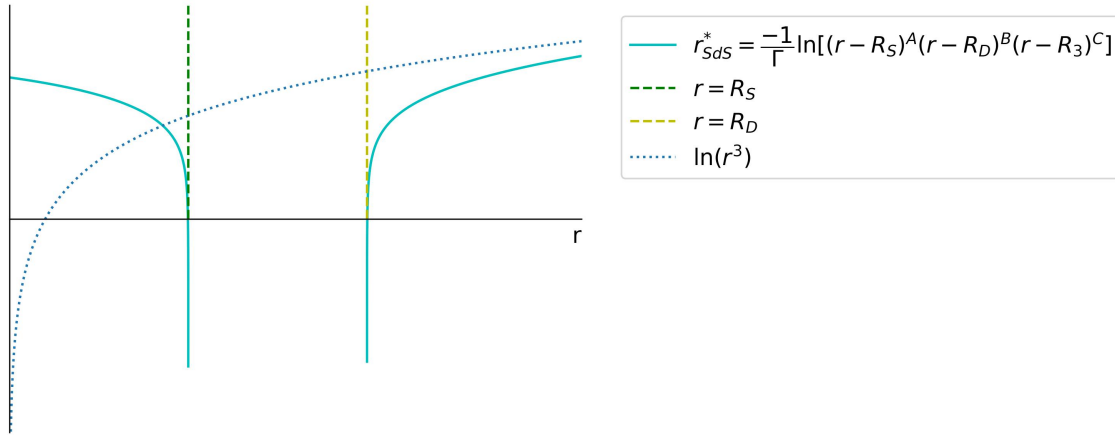


Figura 6.13: Gráfica de la función  $r_{SdS}^*$ . El dibujo revela que en valores grandes de  $r$  la función  $r_{SdS}^*$  se comporta de manera asintótica como  $\ln(r^3)$ . Se ilustran las posiciones de los dos horizontes positivos, mientras que el negativo carece de significado físico, pues  $r > 0$ .

en donde  $\xi \neq 0$ , pues  $\rho = \xi\chi \neq 0$ . Entonces  $\partial_t \Theta = 0$ , lo cual implica que  $\Theta$  es una función constante. Usando este valor para  $\Theta$  en la ecuación (6.23) tendremos

$$f \partial_r \rho = 0, \quad (6.83)$$

la cual a su vez implica que  $\chi$  es una función constante, pues  $d\chi/dt = 0$ . Se eligen los valores  $\Theta = 1$  y  $\chi = 1/\beta$  por conveniencia, con los cuales la ecuación (6.33) se leerá como

$$\frac{d\xi}{dt} = \beta, \quad (6.84)$$

de manera que la función  $\xi = \beta t + c$  la satisface. El origen del tiempo puede moverse de manera que  $c = 0$  en esta expresión. Además se puede reescalar esta misma función  $\beta\xi$  de manera que  $\xi = t$ . Escribiendo la derivada de  $T$  respecto a  $r$  y usando la ecuación (6.33) tendremos

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dr} &= \frac{d\Phi}{dr} \\ &= \frac{\chi}{f} \frac{d\xi}{dt}, \end{aligned} \quad (6.85)$$

en donde colocamos los valores obtenidos para  $\chi$  y  $\xi$  para obtener

$$dT = d\Phi = \frac{dr}{f}. \quad (6.86)$$

Por otro lado, manipulamos la ecuación (6.25) para reescribirla como

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{1}{f} \frac{dr}{dt}. \quad (6.87)$$

Comparamos las ecuaciones (6.86) y (6.87) para concluir que  $d\rho = dt$ . Regresamos a la ecuación (6.25), en donde ahora podemos usar el resultado  $\partial_r \rho = 0$  para simplificarla:

$$(\partial_r T)^2 = -\frac{1}{f\Omega^2}. \quad (6.88)$$

Al mismo tiempo, usando (6.25) también tendremos la relación

$$-\frac{f}{\Omega^2} = (\partial_t \rho)^2, \quad (6.89)$$

de donde obtenemos la expresión para  $\Omega^2$

$$\Omega^2 = \frac{-f}{(\partial_t \rho)^2}, \quad (6.90)$$

pero anteriormente se obtuvo que  $dt = d\rho$ , de manera que  $\partial_t \rho = 1$  y entonces

$$\Omega^2 = -f. \quad (6.91)$$

Para verificar el resultado, regresamos a la ecuación (6.1), en la cual se sustituirán los valores de  $dT$  y  $\Omega^2$  obtenidos en las ecuaciones (6.86) y (6.91):

$$\begin{aligned} ds_{(1)}^2 &= \Omega^2 (-dT^2 + d\rho^2) \\ &= -f \left( -\left(\frac{1}{f} dr\right)^2 + (dt^2) \right). \end{aligned} \quad (6.92)$$

la simplificación de esta expresión revela que  $ds_{(1)}^2 = ds_{(2)}^2$ . La elección de  $\beta = 0$  dirigirá a la misma conclusión con una serie de pasos análogos a los de  $\alpha = 0$ , salvo una diferencia sin significado destacable, pues en el caso presentado se ha obtenido que la coordenada original  $t$  ahora corresponde a una coordenada radial  $\rho$ , pues tenemos  $t = \rho$ , mientras que la coordenada original  $r$  ahora está relacionada directamente con la nueva coordenada temporal  $T$  mediante  $T = r^* = \int f^{-1} dr$ . En el caso  $\beta = 0$  este cambio de tipo de coordenadas no ocurre. En suma, para el caso  $\alpha\beta = 0$  esta transformación mapea sobre sí mismo y  $\Omega^2$  es proporcional a  $f(r)$ . Esto es parecido a lo que ocurre con las coordenadas tortoise cuando se trabaja con la métrica de Schwarzschild, las cuales dirigen al siguiente elemento de línea  $ds^2$ :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) (-dt^2 + dr_{Sch}^{*2}) + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2, \quad (6.93)$$

en donde la nueva coordenada radial  $r^*$  es definida como la integral  $\int f^{-1} dr$  y para este caso resulta igual a la coordenada definida en (4.3), como se muestra al inicio de la sección 6.2.1. Por otro lado, recordemos que la coordenada de tortoise para de-Sitter  $r_{dS}^*$  es un mapeo de  $(0, \sqrt{\Gamma}^{-1})$  hacia  $(0, \infty)$ . Así, para el caso  $\alpha\beta = 0$ , las coordenadas conformes para esta métrica tomarán la siguiente forma:

$$ds^2 = (1 - \Gamma r^2) (-dT^2 + dr_{dS}^{*2}) + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2, \quad (6.94)$$

en donde  $r_{dS}^*$  está definido en (6.67). Para dar otro ejemplo, en el caso de la métrica de Reissner-Nordström (3.6) tendremos la siguiente forma conforme:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) (-dt^2 + dr_{RN}^{*2}) + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2, \quad (6.95)$$

en donde  $r_{RN}^*$  está dado en (6.72). En resumen, el caso  $\alpha\beta = 0$  resulta en coordenadas de tipo tortoise para métricas que satisfagan la forma original (6.1), como lo son Schwarzschild, de-Sitter, Reissner-Nordström, Anti-de-Sitter, entre otras.

## 6.4. Coordenadas conformes tipo Kruskal

El tercer y último caso es para el producto  $\alpha\beta > 0$ . Veremos que la ecuación (6.35) se mantiene igual y que las soluciones para  $\Theta$  pueden ser funciones exponenciales o equivalentemente senos y cosenos hiperbólicos. Como sabemos, las coordenadas de Kruskal-Szekeres poseen un término del tipo hiperbólico, por lo que podemos esperar que este caso nos dirija hacia ellas. Esta vez definimos  $\omega^2 = \alpha\beta > 0$  y elegimos que la solución para  $\Theta$  tenga la forma  $\Theta = c_1 \sinh(\omega t + \phi_0)$ , con la cual obtenemos  $\xi = c_2 \cosh(\omega t + \phi_0)$  gracias a la ecuación (6.30) y también una relación entre las constantes dada por  $c_2 = c_1 \sqrt{\beta/\alpha}$ . Emplearemos la relación auxiliar (6.38) con la elección de  $\sigma_1 = 0$ . Así,  $\sigma_1 = 0$  dirige a la relación  $\chi = \pm \sqrt{\alpha/\beta} \Phi$ , la cual se puede insertar en (6.33) para obtener la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d\Phi}{dr} = \pm \omega \frac{1}{f}, \quad (6.96)$$

cuya integración otorga la siguiente forma para  $\Phi$ :

$$\Phi = A \exp \left( \pm \omega \int f^{-1} dr \right). \quad (6.97)$$

La forma para  $\chi$  es obtenida directamente. Colocando los resultados obtenidos en las nuevas coordenadas  $T$  y  $\rho$  se consigue lo siguiente:

$$T = c_1 A e^{\pm \omega r^*} \sinh(\omega t + \phi_0) \quad (6.98)$$

$$\rho = c_1 A e^{\pm \omega r^*} \cosh(\omega t + \phi_0). \quad (6.99)$$

Al igual que en el caso  $\alpha\beta < 0$ , empleamos la relación (6.21) para obtener una forma para el factor conforme  $\Omega^2$ . El resultado es

$$\Omega^2 = \frac{f \Phi^{-2}}{\omega}. \quad (6.100)$$

Para demostrar el poder de estos resultados, obtendremos las coordenadas de Kruskal-Szekeres deducidas en el capítulo 4 para la métrica de Schwarzschild en donde  $f(r) = 1 - r_s/r$ . La coordenada  $r^*$  que aparece en la exponencial es la que fue obtenida en (6.62). En este caso, la función exponencial se reescribe como

$$\begin{aligned} e^{\pm\omega r_{Sch}^*} &= e^{\pm\omega(r+r_s \ln(\frac{r}{r_s}-1))} \\ &= e^{\pm\omega r} \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{\pm\omega r_s}. \end{aligned} \quad (6.101)$$

La elección de signo positivo en esta ecuación,  $\phi_0 = 0$  y  $c_1 A = 1$  dirigen a

$$T = e^{\omega r} \sinh(\omega t) \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{\omega r_s} \quad (6.102)$$

y

$$\rho = e^{\omega r} \cosh(\omega t) \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{\omega r_s}. \quad (6.103)$$

La elección de  $\omega = (2r_s)^{-1}$  dirige de manera inmediata a las coordenadas de Kruskal-Szekeres definidas en (4.14) y (4.15) con el cambio de notación de  $\rho = R$ , recordando que  $r_s = 2M$ . En resumen, cualquier elección diferente de  $\omega$ ,  $\phi_0$  y  $c_1 A$  dirige a nuevas coordenadas conformes planas en secciones de ángulos constantes que son novedosas. Para dar otro ejemplo, consideremos  $\omega = (r_s)^{-1}$ , lo cual dirige a

$$T = e^{r/r_s} \left(\frac{r}{r_s} - 1\right) \sinh\left(\frac{t}{r_s}\right). \quad (6.104)$$

y

$$\rho = e^{r/r_s} \left(\frac{r}{r_s} - 1\right) \cosh\left(\frac{t}{r_s}\right). \quad (6.105)$$

Para construir el diagrama de Kruskal originado por estas coordenadas, es necesario considerar la relación análoga a (4.17):

$$\rho^2 - T^2 = e^{2r/r_s} \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^2. \quad (6.106)$$

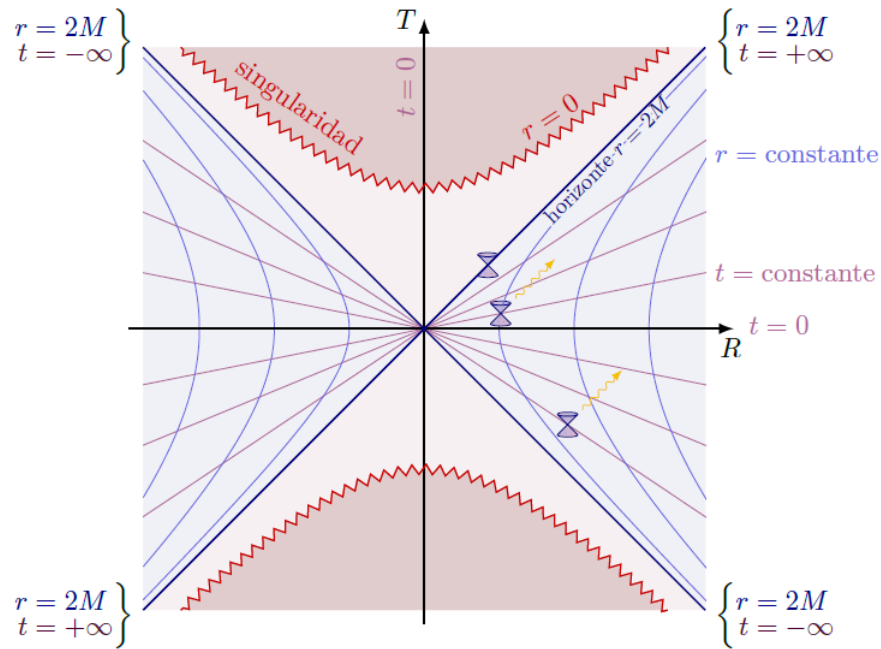


Figura 6.14: Extensión parcial de la métrica de Schwarzschild generado por la ecuación (6.106). Las coordenadas son definidas en (6.104) y (6.105).

En este caso, el horizonte de eventos todavía se localiza en  $T = \pm\rho$ , aunque debido a que el lado derecho de (6.106) solo puede tomar valores positivos, esta es una ecuación de hipérbolas horizontales, como se muestra en la figura (6.14). En esta figura se aprecia que estas coordenadas no son la extensión maximalmente simétrica para la métrica de Schwarzschild, sino una extensión parcial: Solo existen dos regiones con  $r > r_s$ , a diferencia del diagrama (4.3) en donde se aprecian cuatro regiones para incluir  $r < r_s$ . Por último, vale la pena mencionar que además de las diferentes elecciones para las constantes  $\omega$ ,  $c_1$  y  $A$ , existe la posibilidad de elegir las formas para  $\Theta$  y  $\xi$  como una exponencial en lugar de senos o cosenos hiperbólicos. Esto da lugar a un espectro mayor de sistemas coordenados del tipo Kruskal, además de que esto también funciona para las otras métricas que ya se han mencionado. En el caso de la métrica de de-Sitter, la coordenada  $r_{dS}^*$  está dada por (6.67):

$$r_{dS}^* = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \tanh^{-1}(\sqrt{\Gamma}r). \quad (6.107)$$

Así, la forma de la función  $\Phi$  dada en (6.97) será

$$\Phi = A \exp \left[ \pm \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\Gamma}r}{1 - \sqrt{\Gamma}r} \right)^{\omega/2\sqrt{\Gamma}} \right], \quad (6.108)$$

en donde usamos la identidad

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

para simplificar la exponencial:

$$\Phi = \pm A \left( \frac{1 + \sqrt{\Gamma}r}{1 - \sqrt{\Gamma}r} \right)^{\omega/2\sqrt{\Gamma}}. \quad (6.109)$$

La elección del signo positivo,  $A = 1 = c_1$ ,  $\phi_0 = 0$  y  $\omega = -\sqrt{\Gamma}$  dan lugar a

$$\begin{aligned} \Phi &= \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\Gamma}r}{1 + \sqrt{\Gamma}r}} \\ &= \frac{1 - \sqrt{\Gamma}r}{\sqrt{1 - \Gamma r^2}}. \end{aligned} \quad (6.110)$$

Así, el sistema coordenado  $(\rho, T)$  para la métrica de de-Sitter está dado por

$$T = \frac{1 - \sqrt{\Gamma}r}{\sqrt{1 - \Gamma r^2}} \operatorname{senh}(\sqrt{\Gamma}t) \quad (6.111)$$

$$\rho = \frac{1 - \sqrt{\Gamma}r}{\sqrt{1 - \Gamma r^2}} \operatorname{cosh}(\sqrt{\Gamma}t), \quad (6.112)$$

mientras que el factor conforme  $\Omega^2$  está dado por

$$\Omega^2 = \frac{\sqrt{1 - \Gamma r^2}}{-\sqrt{\Gamma}}, \quad (6.113)$$



por lo tanto el elemento de línea es

$$ds^2 = \frac{\sqrt{1 - \Gamma r^2}}{\sqrt{\Gamma}} (-dT^2 + d\rho^2) + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2, \quad (6.114)$$

en donde la coordenada  $r$  está implícitamente definida en términos de  $\rho$  y  $T$  mediante

$$\rho^2 - T^2 = \frac{1 - \sqrt{\Gamma}r}{1 + \sqrt{\Gamma}r}. \quad (6.115)$$

Estas con las coordenadas de tipo Kruskal para la métrica de de-Sitter y son las mismas que ya existen en la literatura [34]. Así, el sistema coordenado que hemos encontrado reproduce las coordenadas de Kruskal para la métrica de Schwarzschild y de-Sitter. Como próximo ejemplo, examinemos la métrica de Reissner-Nordström en donde  $f(r) = 1 - r_s/r + Q^2/r^2$ . La coordenada tipo tortoise para este caso fue dada en (6.72). Por lo tanto, la función  $\Phi$  está dada por

$$\Phi = Ae^{\pm\omega r} \left( \frac{r}{r_+} - 1 \right)^{\pm\omega\delta_1} \left( \frac{r}{r_-} - 1 \right)^{-\pm\omega\delta_2}, \quad (6.116)$$

en donde  $\delta_1 = r_+^2 2^{-1} (M^2 - Q^2)^{-1/2}$  y  $\delta_2 = r_-^2 2^{-1} (M^2 - Q^2)^{-1/2}$ . Notamos que  $2(M^2 - Q^2)^{1/2} = r_+ - r_-$ , de manera que  $\delta_1 = r_+^2 (r_+ - r_-)$  y  $\delta_2 = r_-^2 (r_+ - r_-)$ . Así, eligiendo el signo positivo en las exponenciales y  $A = 1$  reescribimos  $\Phi$  como

$$\Phi = e^{\omega r} \frac{\left( \frac{r}{r_+} - 1 \right)^{\omega r_+^2 (r_+ - r_-)}}{\left( \frac{r}{r_-} - 1 \right)^{\omega r_-^2 (r_+ - r_-)}}. \quad (6.117)$$

Al elegir  $\omega = -r_+^{-2} (r_+ - r_-)$  obtenemos las coordenadas tipo Kruskal para la métrica de Reissner-Nordström que se encuentran en la literatura [35]:

$$T = \exp \left( \frac{r_+ - r_-}{r_+} \right)^2 \frac{\left( \frac{r}{r_+} - 1 \right)^{(r_+ - r_-)^2}}{\left( \frac{r}{r_-} - 1 \right)^{(r_+ - r_-)^2 \left( \frac{r_-}{r_+} \right)^2}} \text{senh} \left( \frac{r_+ - r_-}{r_+^2} t \right) \quad (6.118)$$

$$\rho = \exp\left(\frac{r_+ - r_-}{r_+}\right)^2 \frac{\left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{(r_+ - r_-)^2}}{\left(\frac{r}{r_-} - 1\right)^{(r_+ - r_-)^2} \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^2} \cosh\left(\frac{r_+ - r_-}{r_+^2} t\right). \quad (6.119)$$

El mismo procedimiento dirige a las coordenadas tipo Kruskal para otras métricas como Anti-de-Sitter, Schwarzschild-de-Sitter, y aquellas que satisfagan la forma (6.1). A continuación, veremos que una elección diferente de las múltiples constantes que aparecen a lo largo de la transformación y diferentes soluciones a las ecuaciones diferenciales dirigen a un sistema coordenado diferente. Al retomar la ecuación diferencial para  $\Theta$  dada por (6.35) con  $\alpha\beta > 0$ , proponemos una solución en la forma  $\Theta = c_3 e^{\pm\omega t}$  y análogamente para  $\xi$  como  $\xi = c_4 e^{\pm\omega t}$ . Una relación entre las constantes es obtenida al introducir estas dos formas en la ecuación original  $d\Theta/dt = \alpha\xi$  como  $c_3 = \sqrt{\alpha/\beta}c_4$ . Por otro lado, de la ecuación para  $\chi$  dada por

$$\chi = \frac{f}{\beta} \frac{d\Phi}{dr}$$

y la relación auxiliar  $\alpha\Phi^2 - \beta\chi^2 = \sigma_1$  obtenemos la siguiente ecuación diferencial para  $\Phi$ :

$$\frac{f}{\beta} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sqrt{\alpha\Phi^2 - \sigma_1}, \quad (6.120)$$

en donde no hemos considerado  $\sigma_1 = 0$  como se hizo anteriormente. Al resolver esta ecuación para  $\Phi$  el resultado es

$$\Phi = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\alpha}} \cosh(\omega r^*), \quad (6.121)$$

y análogamente para  $\chi$  como

$$\chi = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\beta}} \sinh(\omega r^*). \quad (6.122)$$

Así, el sistema coordenado  $(\rho, T)$  está dado por

$$T = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\alpha}} c_3 e^{\omega t} \cosh(\omega r^*) \quad (6.123)$$

y

$$\rho = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\alpha}} c_3 e^{\omega t} \sinh(\omega r^*). \quad (6.124)$$

Al introducir esta forma de  $\rho$  en (6.21) obtenemos el factor conforme  $\Omega^2$  como

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{\sigma_1 \beta c_3^2 e^{2\omega t}}{f}. \quad (6.125)$$

Así, hemos obtenido un sistema coordenado diferente al original de Kruskal-Szekeres, pues en este caso las funciones exponenciales dependen del tiempo  $t$  en lugar de la posición  $r$ , y análogamente para las funciones hiperbólicas. Para llevar a cabo el análisis de estas, elijamos  $c_3 \sqrt{\sigma_1/\alpha} = 1$  y  $\omega = r_s^{-1}$ . El sistema que resulta es

$$T = e^{t/r_s} \cosh\left(\frac{r^*}{r_s}\right) \quad (6.126)$$

y

$$\rho = e^{t/r_s} \sinh\left(\frac{r^*}{r_s}\right). \quad (6.127)$$

Realizamos las siguientes manipulaciones de manera análoga al caso original de Kruskal y al caso  $\alpha\beta < 0$  como:

$$T^2 - \rho^2 = e^{2t/r_s} \quad (6.128)$$

$$\rho = T \tanh\left(\frac{r^*}{r_s}\right). \quad (6.129)$$

En el caso de Schwarzschild es necesario considerar la coordenada de tortoise como

$$r^* = \begin{cases} r + r_s \ln\left(1 - \frac{r}{r_s}\right) & r < r_s \\ r + r_s \ln\left(\frac{r}{r_s} - 1\right) & r > r_s, \end{cases} \quad (6.130)$$

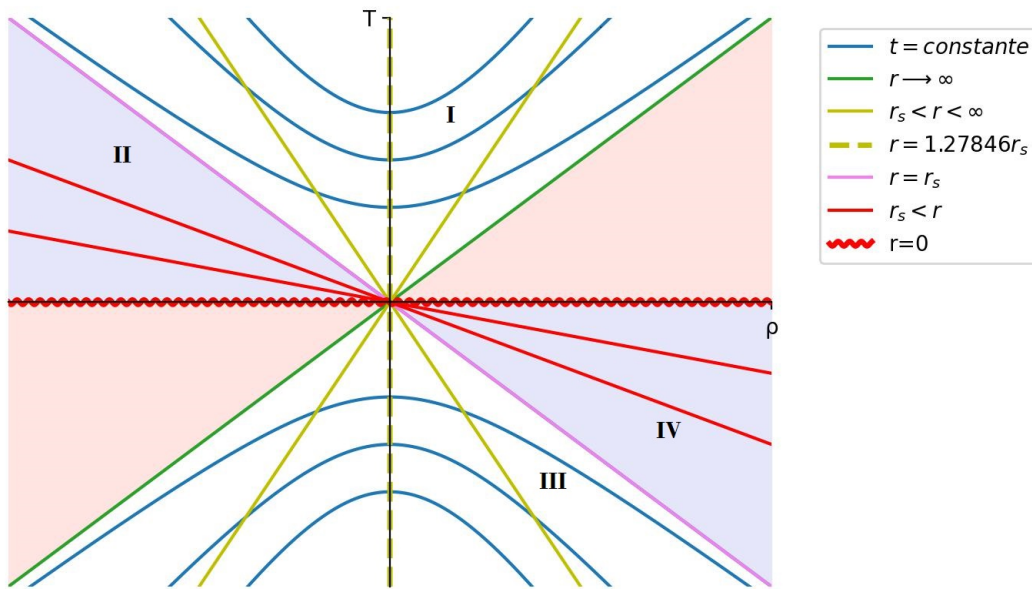


Figura 6.15: Diagrama de Kruskal para la métrica de Schwarzschild construido con las coordenadas (6.126) y (6.127). En este, cada hipérbola corresponde a un valor constante del tiempo  $t$  y cada línea recta es un valor de la coordenada radial  $r$ . De manera análoga al sistema coordenado original de Kruskal dado en las ecuaciones (4.14) y (4.15), se alcanza una extensión maximalmente simétrica de la geometría de Schwarzschild, pues en este han surgido cuatro regiones indicadas con números romanos.

pues la extensión maximal de Kruskal es apta para describir el interior y exterior del agujero negro en cuestión. Así, la ecuación (6.128) proporciona una hipérbola para cada valor del tiempo  $t$ , mientras que (6.129) provee una ecuación de línea recta para cada valor de la coordenada  $r$ . El resultado es un diagrama parecido a (4.3) ilustrado en (6.15). En este tenemos cuatro regiones, dos exteriores al agujero negro y dos interiores. Esta vez, el horizonte de eventos corresponde a una línea dada por  $T = -\rho$ , mientras que  $T = +\rho$  pertenece a  $r \rightarrow +\infty$ .

---

# Capítulo 7

## Conclusiones

En este trabajo se han explorado diversas transformaciones de coordenadas y se han aplicado los resultados en métricas conocidas. En particular, se explora bajo qué condiciones se puede obtener un sistema coordenado estático para un modelo cosmológico en expansión como el de Friedmann. El resultado es que métricas como de-Sitter, Anti-de-Sitter, Lanczos y Milne, las cuales son casos especiales de la métrica mencionada, pueden ser llevadas hacia una forma estática, con simetría esférica y con sus componentes satisfaciendo la relación  $g_{00}g_{11} = -1$ . Este desarrollo fue indispensable porque posteriormente se analiza la transformación  $ds_{(1)}^2 \rightarrow ds_{(2)}^2$ , en donde

$$ds_{(1)}^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2(\theta)d\phi^2$$

y

$$ds_{(2)}^2 = \Omega^2(T, \rho)(-dT^2 + d\rho^2) + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2(\theta)d\phi^2,$$

la cual es, por ejemplo, válida para agujeros negros descritos por Schwarzschild con y sin carga eléctrica y para modelos cosmológicos como los mencionados. Para llevar a cabo esta transformación se consideran secciones de ángulos constantes, en donde  $d\theta = d\phi = 0$ . Esto es para que  $ds_{(2)}^2$  posea una forma conforme plana. En el texto se argumentó que esta transformación siempre puede llevarse a cabo porque toda métrica bidimensional es conforme plana. Los resultados obtenidos son

diversos sistemas coordenados  $(\rho, T)$  y diferentes factores conformes  $\Omega^2(\rho, T)$  en términos de las coordenadas originales, cuyos análisis se llevan a cabo. Los sistemas obtenidos pueden agruparse en tres tipos diferentes: En el primero aparecen funciones periódicas en términos de  $t$  y  $r$ , cuyo análisis dirige hacia un diagrama compuesto plenamente de elipses en un plano  $(\rho, T)$ , en donde cada superficie elíptica es a  $t$  o  $r$  constantes (ver figuras 6.1, 6.5). Así, se logra una compactificación del espacio-tiempo original en una manera diferente a como lo hace la compactificación de Penrose-Carter, aunque no se logra una extensión maximal como sucede como las coordenadas de Kruskal. Hemos bautizado estos sistemas coordenados como coordenadas pulsantes. En el segundo tipo de sistemas se obtienen unas coordenadas de tipo tortoise, pues  $\Omega^2 = f(r)$  y la coordenada tipo tiempo se mantiene como la original, aunque la coordenada tipo espacio sufre una transformación del tipo  $dr^* = f^{-1}dr$ . El tercer tipo son unas coordenadas que pueden colocarse en términos de funciones exponenciales o hiperbólicas y cuya elección conveniente de ciertas constantes que aparecen en el procedimiento dirigirá a las coordenadas de tipo Kruskal usuales para las métricas que este método se aplique, como Schwarzschild, de-Sitter y aquellas que satisfagan la forma (6.1). En este y en el primer caso se pueden obtener sistemas coordenados que son novedosos y no se encuentran en la literatura. La extensión de este método y su empleo para compactificar otras métricas relevantes, así como un estudio más profundo de la naturaleza compacta y simplificada de la métrica de Anti-de-Sitter en las coordenadas pulsantes y su relación con la correspondencia AdS/CFT es dejado como trabajo futuro [36].

---

# Bibliografía

- [1] Albert Einstein. Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 844–847, January 1915.
- [2] K. Schwarzschild. On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein's Theory. *Abh. Konigl. Preuss. Akad. Wissenschaften Jahre 1906,92, Berlin, 1907*, 1916:189–196, January 1916.
- [3] W. de Sitter. On the curvature of space. *KNAW, Proceedings*, 20 I, Amsterdam, 1918, pp. 229-243.
- [4] A. Friedmann. Über die Krümmung des Raumes. *Zeitschrift für Physik*, 10:377–386, January 1922.
- [5] Tim Adamo and E. T. Newman. The Kerr-Newman metric: A Review. *Scholarpedia*, 9:31791, 2014.
- [6] Charles W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973, pp. 329-360.
- [7] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2003.
- [8] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson. A Determination of the Deflection of Light by the Sun's Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 220:291–333, January 1920.
- [9] G. M. Clemence. The relativity effect in planetary motions. *Rev. Mod. Phys.*, 19:361–364, Oct 1947.

- [10] B. P. Abbott et al. [LIGO Scientific and Virgo]. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Physical Review Letters*, 116(6), feb 2016, arXiv:1602.03837 [gr-qc].
- [11] The Event Horizon Telescope Collaboration. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(1):L1, apr 2019.
- [12] F. Zwicky. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. *Astrophys. J.*, 86:217–246, 1937.
- [13] Alan H. Guth. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, 23:347–356, Jan 1981.
- [14] Daniel Aloni, Asher Berlin, Melissa Joseph, Martin Schmaltz, and Neal Weiner. A step in understanding the hubble tension. *Physical Review D*, 105(12), jun 2022.
- [15] Carlo Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004, pp.20-28.
- [16] B. Zwiebach. *A first course in string theory*. Cambridge University Press, 7 2006, pp.10-15.
- [17] Abhay Ashtekar and Eugenio Bianchi. A short review of loop quantum gravity. *Reports on Progress in Physics*, 84(4):042001, mar, 2021, pp. 85-90.
- [18] J. A. Nieto, Edgar Alejandro León, and C. García-Quintero. Cosmological-static metric correspondence and Kruskal type solutions from symmetry transformations. *Rev. Mex. Fis.*, 68(4):040701, 2022.
- [19] Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, 2 edition, 2009, pp. 50-120, 164-171.
- [20] Diego Fernández-Silvestre, Joshua Foo, and Michael R R Good. On the duality of schwarzschild–de sitter spacetime and moving mirror. *Classical and Quantum Gravity*, 39(5):055006, feb 2022.
- [21] Sarp Akcay and Richard A Matzner. The kerr–de sitter universe. *Classical and Quantum Gravity*, 28(8):085012, mar 2011.



- [22] John C. Graves and Dieter R. Brill. Oscillatory character of reissner-nordström metric for an ideal charged wormhole. *Phys. Rev.*, 120:1507–1513, Nov 1960.
- [23] Licia Verde, Tommaso Treu, and Adam G. Riess. Tensions between the early and late universe. *Nature Astronomy*, 3(10):891–895, sep 2019.
- [24] J. A. Nieto, Edgar Alejandro León, and C. García-Quintero. Cosmological-static metric correspondence and Kruskal type solutions from symmetry transformations. *Rev. Mex. Fis.*, 68(4):040701, 2022.
- [25] Abhas Mitra. When can an expanding universe look static and vice versa: A comprehensive study. *International Journal of Modern Physics D*, 24(05):1550032, 2015.
- [26] A. Einstein and N. Rosen. The particle problem in the general theory of relativity. *Phys. Rev.*, 48:73–77, Jul 1935.
- [27] Peter Collas and David Klein. Embeddings and time evolution of the schwarzschild wormhole. *American Journal of Physics*, 80(3):203–210, mar 2012.
- [28] José P.S. Lemos and Diogo L.F.G. Silva. Maximal extension of the schwarzschild metric: From painlevé–gullstrand to kruskal–szekeres. *Annals of Physics*, 430:168497, 2021.
- [29] Ted Jacobson. When is  $g_{tt}g_{rr} = -1$ ? *Classical and Quantum Gravity*, 24(22):5717–5719, nov 2007.
- [30] David G. Boulware and S. Deser. String-generated gravity models. *Phys. Rev. Lett.*, 55:2656–2660, Dec 1985.
- [31] Martin Schottenloher, editor. *A mathematical introduction to conformal field theory*, volume 759. 2008, pp. 105-108.
- [32] Jemal Guven and Darío Núñez. Schwarzschild-de sitter space and its perturbations. *Phys. Rev. D*, 42:2577–2584, Oct 1990.
- [33] Edgar Rechtschaffen. 92.35 real roots of cubics: explicit formula for quasi-solutions. *The Mathematical Gazette*, 92(524):268–276, 2008.
- [34] Johanna Friedl Beck and Akira Inomata. Kruskal like representation of the de Sitter metric. *Journal of Mathematical Physics*, 25(10):3039–3040, 10 1984.

- [35] Jun-Qi Guo and Pankaj S. Joshi. Interior dynamics of neutral and charged black holes. *Phys. Rev. D*, 92:064013, Sep 2015.
- [36] Juan Maldacena. *International Journal of Theoretical Physics*, 38(4):1113–1133, 1999.

---

# Divulgación de Resultados y Validación Académica

Los resultados de esta tesis han dirigido a un artículo que se encuentra en arbitraje:

E. A. León, J. A. Nieto, A. Sandoval-Rodríguez, and **B. Martínez-Olivas**, “Beyond schwarzschild: New pulsating coordinates for spherically symmetric metrics.,” *General Relativity and Gravitation*, vol. preprint, [doi:10.21203/rs.3.rs-2632064/v1](https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-2632064/v1).

Además, los mismos resultados serán presentados en el LXVI Congreso Nacional de Física a llevarse a cabo el 12 de octubre de 2023, bajo el nombre de “Más allá de Schwarzschild: Nuevas coordenadas pulsantes para métricas con simetría esférica”, con clave única **LXVI-006369**.