

Universidad Autónoma de Sinaloa

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS



Programa de Posgrado en Física

“HACIA UNA MEJOR COMPRENSIÓN DE SCHWARZSCHILD Y DE
SITTER, Y SUS EXTENSIONES”

TESIS

como requisito para obtener el grado de

MAESTRO EN FÍSICA

Presentada por:

LIC. ANDRÉS SANDOVAL RODRÍGUEZ

Directores de Tesis:

DR. EDGAR ALEJANDRO LEÓN

DR. JUAN ANTONIO NIETO

Culiacán Sinaloa, México a 22 de agosto de 2024



Dirección General de Bibliotecas
Ciudad Universitaria
Av. de las Américas y Blvd. Universitarios
C. P. 80010 Culiacán, Sinaloa, México.
Tel. (667) 713 78 32 y 712 50 57
dgbuas@uas.edu.mx

UAS-Dirección General de Bibliotecas

Repositorio Institucional Buelna

Restricciones de uso

Todo el material contenido en la presente tesis está protegido por la Ley Federal de Derechos de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

Queda prohibido la reproducción parcial o total de esta tesis. El uso de imágenes, tablas, gráficas, texto y demás material que sea objeto de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente correctamente mencionando al o los autores del presente estudio empírico. Cualquier uso distinto, como el lucro, reproducción, edición o modificación sin autorización expresa de quienes gozan de la propiedad intelectual, será perseguido y sancionado por el Instituto Nacional de Derechos de Autor.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-No Comercial
Compartir Igual, 4.0 Internacional



Resumen

En el presente trabajo se hace un estudio sobre soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein, en particular, de las métricas de Schwarzschild y de Sitter.

Partiendo de las métricas, se analiza el papel que tienen las transformaciones de coordenadas en el estudio de la geometría del espacio tiempo. Finalmente, se obtienen nuevos formalismos para las transformaciones que parten de un elemento de línea estático con la característica de que $g_{00}g_{11} = -1$.

Palabras Clave: Gravitación, Kruskal-Szekeres, de Sitter, Schwarzschild.

Dedicatoria

A mi familia y amigos, por su paciencia y apoyo.

Agradecimientos

A mis padres, María Jesús Rodríguez Bojórquez y Martín Sandoval Bojórquez que durante años han brindado su apoyo y paciencia.

Al Dr. Édgar Alejandro León Espinoza, quien me ha guiado desde mis inicios en la física, por compartir sus conocimientos y apoyarme en constantes consultas.

Al Dr. Juan Antonio Nieto García, por compartir su experiencia y visión en la ciencia.

A mis profesores y compañeros del posgrado, por tantas clases, charlas y cafés compartidos.

A CONAHCyT (CVU: 964480), por el apoyo económico que me permitió realizar esta investigación.

Y a la Universidad Autónoma de Sinaloa, con su planta docente y administrativa, que me han permitido formarme como investigador en esta institución.

Contenido

Resumen	I
Dedicatoria	II
Agradecimientos	III
Contenido	v
Lista de Figuras	VI
Lista de Tablas	VII
Introducción	1
1. Fundamentos de Relatividad General	4
1.1. Fundamentos de la Relatividad	4
1.2. Ecuaciones de Campo de Einstein	6
1.3. Soluciones a las ecuaciones de Campo de Einstein	7
1.3.1. Solución de Schwarzschild	7
1.3.2. Solución de de Sitter	12
1.4. Transformaciones de coordenadas	14
2. Métrica de Schwarzschild	16
2.1. Introducción	16
2.1.1. Coordenadas de Rindler	16
2.2. Transformaciones conformes	19
2.2.1. Coordenadas isotrópicas	20
2.3. Extendiendo el espacio	22
	IV

2.3.1. Coordenadas de Kruskal-Szekeres	22
2.3.2. Diagramas conformes	28
3. Cosmología	30
3.1. Introducción	30
3.1.1. Métrica de FLRW	31
3.2. Métrica de de Sitter	36
3.2.1. Coordenadas estáticas	36
3.3. Extendiendo el espacio	37
3.3.1. Diagrama conforme	42
3.4. Anti de Sitter (AdS)	44
4. Transformación general	47
4.1. Introducción	47
4.1.1. Transformación general	47
4.2. FLRW	50
4.3. Coordenadas estáticas	53
4.3.1. Minkowsky	54
4.3.2. Coordenadas cercanas al horizonte	56
4.3.3. Coordenadas de Tortoise	56
4.3.4. Coordenadas isotrópicas	58
5. Conclusiones	61
A. Toda métrica bidimensional es conforme plana	63
B. Cosmología tipo Agujero Negro	66
Bibliografía	68

Lista de Figuras

1.1. Conos de luz en las coordenadas de Schwarzschild. Conforme nos acercamos $r = 2GM$ estos se cierran.	12
2.1. Diagrama de Kruskal-Szekeres, donde se muestra la estructura causal de Schwarzschild maximalmente extendido. Figura modificada a partir de https://tikz.net/category/physics/relativity/	27
2.2. Diagrama de Penrose	29
3.1. Diagrama de Kruskal para la métrica de de Sitter.	41
3.2. Diagrama de Penrose para de Sitter	42
3.3. Diagrama de Penrose para la métrica de Sitter, se representa con $O+$ el futuro causal de un observador clásico en el polo sur.	43
3.4. Diagrama de Penrose para la métrica de Sitter, se representa con $O-$ el pasado causal de un observador clásico en el polo sur	43
3.5. Diagrama de Penrose para el espacio-tiempo anti de Sitter	46
4.1. Conos de luz para la métrica de Schwarzschild con las coordenadas de Tortoise.	58

Lista de Tablas

3.1. Valores normales para el parámetro barotrópico w	35
4.1. Modelos FLRW que admiten coordenadas estáticas	52

Introducción

La relatividad general es la mejor descripción de la gravedad que se tiene. Se considera que su estructura básica fue otorgada en noviembre de 1915 con las presentaciones casi simultáneas de la teoría por parte de Albert Einstein y David Hilbert. Con el tiempo, las implicaciones de la teoría fueron comprendidas de una mejor manera. En particular, temas muy propios de la relatividad, como son agujeros negros, la evolución del universo, la existencia de las ondas gravitacionales, entre otras, en algún momento fueron cuestionados o relegados como meras curiosidades sin realidad física.

La solución de agujero negro más simple fue obtenida por Schwarzschild, inmediatamente después de que se diera a conocer la relatividad. Sin embargo, el papel de las singularidades que aparecen en esta métrica no fue comprendido adecuadamente durante mucho tiempo, de tal manera que durante décadas prevaleció la opinión de que los agujeros negros no existían [1] y se buscaron maneras matemáticas de evitar estas singularidades [2].

Solo posteriormente, cuando aspectos observacionales motivaron a revalorar los trabajos de Oppenheimer [3], y cuando vino lo que se conoce como la “época dorada de los agujeros negros”, fue que fueron percibidos como una posibilidad real. De la misma forma, la evolución del universo a gran escala requirió trabajo en varios frentes, tanto en observaciones astronómicas como en la misma teoría.

Es útil destacar un aspecto de la teoría de relatividad que está íntimamente relacionado con todo lo mencionado: es una teoría covariante. Esto es, la forma de las ecuaciones, en su forma más simple, queda expresada en forma tensorial, y por lo tanto la hace válida independientemente de las coordenadas o del marco de referencia que se esté usando. De hecho la generalización de la propiedad de covarianza, llamada *invariancia difeomórfica*, ha motivado también intentos hacia una teoría cuántica de gravedad.

El presente trabajo de tesis se centra en estudiar distintos aspectos relativos a trans-

formaciones en soluciones analíticas de las ecuaciones de Einstein. En especial, para describir dos tipos de espacio-tiempos que son fundamentales para entender otros más complejos tanto en agujeros negros como en cosmología: Schwarzschild y de-Sitter. En el proceso, estudiamos lo que sucede con otras soluciones que se les asemejan de distintas formas, como son otros espacios estáticos, algunas soluciones cosmológicas y algunas que incluyen agujeros negros y horizontes cosmológicos. Como veremos, distintas transformaciones de soluciones analíticas pueden asociarse directamente a coordenadas bien sea de representación, asociadas a distintos tipos de observadores, a algunas especie de compactificación, o a una mezcla de ellas.

Los resultados principales de este trabajo resultan ser multipropósito. Por un lado, una descripción didáctica del papel de las coordenadas utilizadas en soluciones analíticas de relatividad general. Por otro, una formulación general que permite estudiar distintos tipos de espacios con las propiedades de un *ansatz* muy general que permite incluir muchas métricas muy conocidas, así como otras que tengan esa propiedad. Por último, la aplicación directa de ese tipo de resultados a las soluciones de Schwarzschild y de de Sitter.

La estructura del resto del presente trabajo de tesis es la siguiente:

- Capítulo 1, **Fundamentos de Relatividad General**. En el se presentará un repaso breve sobre Relatividad, para poder comprender la importancia que ha tenido en la física de los últimos cien años. A su vez, se introducirán las herramientas necesarias para leer el resto del trabajo, como son las propiedades de covariancia, y de algunas soluciones analíticas explícitas a las ecuaciones de Einstein.
- Capítulo 2, **Métrica de Schwarzschild**. Se analizará a detalle la métrica de Schwarzschild, poniendo en práctica las transformaciones de coordenadas para ampliar la comprensión del espacio-tiempo. Los desarrollos aquí son los típicos de texto, lo que nos permitirá hacer una conexión con las aportaciones que hacemos desde otro punto de vista.
- Capítulo 3, **Cosmología**. Se obtendrán las soluciones tipo FLRW, es decir asumiendo al Universo como homogéneo e isotrópico. Se pondrá especial énfasis en la solución de de-Sitter, que aunque es de vacío dominante, captura propiedades esenciales para un universo acelerado.
- Capítulo 4, **Transformaciones generales de coordenadas**. Se presentarán los

resultados obtenidos de un análisis muy general acerca de transformaciones de coordenadas. En lugar de un *ansatz* específico, se asume una forma muy general, y a partir de ahí se harán distintas restricciones que pueden llevar a distintas soluciones sea de espacio plano, de tipo agujero negro, cosmológicas, o a una mezcla de estas dos últimas. Los análisis realizados en este trabajo, al igual que su comparación con resultados obtenidos por otras colaboraciones. Además, se muestran resultados preliminares considerando la evolución hidrodinámica del sistema y la justificación para desarrollar tal análisis en el futuro.

- **Capítulo 5, Conclusiones y comentarios finales.** Se presentarán las conclusiones de los análisis y resultados obtenidos en el presente trabajo, así como posibles aplicaciones y trabajo a futuro relacionado con el estudio aquí realizado.

Capítulo 1

Fundamentos de Relatividad General

1.1. Fundamentos de la Relatividad

La física debe ser la misma para todos los observadores. Este enunciado, tan evidente a simple vista, nos lleva a buscar formulaciones matemáticas que nos permitan transformar los fenómenos físicos entre los distintos observadores.

En física clásica, es suficiente con utilizar vectores y sus leyes de transformación basadas en la adición (para la traslación) y multiplicación (para la rotación). Ya que para marcos de referencia inerciales, las leyes de relatividad galileana consisten en operaciones simples, tal como la suma de velocidades.

Sin embargo en 1905, durante su *Annus mirabilis*, Albert Einstein sacudió los cimientos de la mecánica newtoniana, al obtener una conclusión un tanto contra-intuitiva... el tiempo es relativo. Esto lo hizo considerando un postulado más al ya mencionado; la velocidad de la luz en el vacío es invariante, para todo marco de referencia, se observa que es constante (con valor c).

Realmente no fue una idea sin antecedentes, ya había indicios, como la no-invariancia de las ecuaciones de Maxwell, o el fallo del Experimento de Michelson y Morley en la búsqueda del éter. Incluso ya había marcos teóricos incorporando las ideas de tiempo local, trabajos como los de Woldemar Voigt, Lorentz y Poincaré [4].

Sin embargo, fue Einstein quien formuló una teoría nueva, con predicciones acertadas, la llamada *Teoría de Relatividad Especial*. Lo “especial” hace referencia a que solo toma en cuenta espacios planos, no generales. Hasta ese momento, los físicos solo

se preocupaban por transformaciones espaciales, considerando que existía un *tiempo universal* que corría al mismo ritmo para todo observador, sin importar su ubicación o velocidad.

Pero, ¿Cómo se formularon estas ideas de tiempo relativo, qué cambios tiene respecto a las transformaciones clásicas? Hendrick Lorentz ya había trabajado en un marco teórico que permitiría este tipo de *relatividad*, obteniendo las llamadas *transformaciones de Lorentz*, estas se basan en el factor de Lorentz γ y la velocidad relativa β que se definen como,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad (1.1)$$

donde v es la velocidad de un sistema respecto al otro, y c es la velocidad de la luz. En este factor, ya podemos ver la limitación característica que impone la relatividad, $v < c$ (para mantenernos en números reales), es decir, la velocidad de la luz en el vacío es el límite al que se puede mover algo. Esto tiene la consecuencia de evitar fenómenos instantáneos, pues nada puede transmitirse a mayor velocidad que c , esto incluye cualquier tipo de información. Esta conclusión, contradice directamente la teoría de Gravitación Universal de Newton, en la cuál se establecía que los cambios de masa de un cuerpo provocarían efectos instantáneos en todos los demás, mediante la fuerza de gravedad.

Las transformaciones lorentzianas pueden escribirse de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

o escrito de forma más compacta con notación tensorial,

$$x^{\mu'} = \mathcal{B}_{\nu}^{\mu'} x^{\nu}; \quad \mathcal{B}_{\nu}^{\mu} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Este conjunto de transformaciones reciben el nombre de *boost de Lorentz*. Es impor-

tante observar que en estas expresiones, la coordenada temporal es eso, una coordenada más. Es decir, la relatividad de Einstein despoja al tiempo de su carácter absoluto, y nos permite trabajar con el llamado espacio-tiempo, .

1.2. Ecuaciones de Campo de Einstein

En 1915, diez años después del mencionado año milagroso de Einstein y el cambio de paradigma sobre el espacio-tiempo, vino una segunda ola en la revolución de la física. En este año el mismo Einstein publicó sus ecuaciones de campo [5], lo que le llevó formular de la Teoría de Relatividad General en 1916 [6].

¿Qué fue lo revolucionario de su avance? Con la relatividad especial había desarrollado una nueva cinemática. Sin embargo, se dio cuenta de que la teoría de gravitación de Newton era incompatible con esta nueva cinemática, por lo que era necesario replantearse el problema de la gravedad. Así, lo que hizo fue desafiar las concepciones básicas de la física al describir la gravedad no como una fuerza, sino como un efecto de la curvatura del propio espacio-tiempo. Con su ecuación,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

vemos una clara relación entre elementos completamente geométricos por la izquierda (métrica y curvatura) con el tensor energía-momento. Esto diferencia a la gravedad del resto de las fuerzas fundamentales de la naturaleza.

Esto fue solo el inicio, tenemos las ecuaciones, lo siguiente es obtener las soluciones. El primero en obtener una solución exacta no trivial fue Karl Schwarzschild en 1916 (apenas unos meses después de la publicación de Einstein) [7]. Esta solución llegó por sorpresa a un panorama escéptico, debido a que predecía, entre otras cosas, objetos extraños que eventualmente se denominarían *Agujeros Negros*, que no habían sido observados.

Pese a ser la primer solución obtenida, la *métrica de Schwarzschild* sigue teniendo gran relevancia en el campo de la gravitación, debido a que su estudio y comprensión permite estudiar soluciones más complejas a las ecuaciones de Einstein.

Poco tiempo después (1917) Willem de Sitter obtendría su propia solución [8], esta vez obteniendo un modelo cosmológico de un Universo en expansión acelerada, el cuál mantiene relevancia como un límite al cuál puede tender nuestro propio universo.

1.3. Soluciones a las ecuaciones de Campo de Einstein

Resolver las ecuaciones de Einstein (1.4) no es asunto trivial. Recordemos que es una expresión tensorial en un espacio de 4 dimensiones, por lo que son 16 ecuaciones. Debido a consideraciones de simetría (en $g_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$), podemos reducirlas a 10. Esto nos deja un sistema de 10 ecuaciones diferenciales acopladas, cuadráticas en $g_{\mu\nu}$.

Por todo esto es complicado obtener soluciones exactas no triviales a las ecuaciones de Einstein, sin embargo, es posible imponer ciertas condiciones al sistema. Específicamente, se puede asumir alguna forma en que las componentes de la métrica dependan de las coordenadas, así como alguna prescripción realista para el tensor de energía-momento.

Si bien esto último es importante para analizar la posibilidad de alguna realización física de la métrica obtenida como solución final, los aspectos geométricos de representación de la métrica están más asociados usualmente con la parte izquierda de las ecuaciones de Einstein.

Además, estas mismas ecuaciones determinan una retroalimentación, en el sentido de que conociendo la solución métrica podemos determinar el tensor de energía-momento que induce dicha geometría.

Todo lo anterior justifica que este trabajo se centre en soluciones exactas, y de manera particular, en métricas que poseen simetría esférica. Le daremos énfasis a un par de las soluciones que cumplen estas características. Estas son las soluciones de Schwarzschild y de Sitter.

1.3.1. Solución de Schwarzschild

Esta métrica, obtenida en 1916 por Karl Schwarzschild [7], describe un universo estático, vacío y con simetría esférica. Desglosemos esta descripción. Es un universo estático, i.e., no evoluciona con el tiempo, lo cual era lo esperado a principios del siglo XX cuando se obtuvo esta solución. Sin embargo, ahora poseemos gran evidencia experimental que indica un universo dinámico, que no solo se expande, sino que lo hace aceleradamente.

Esto no hace que esta métrica sea inútil, puesto que no se utiliza como modelo cosmológico, salvo una teoría muy particular (para más información ver el apéndice

(B)), sino para describir fenómenos particulares. Además de ser estática, tiene simetría esférica, por lo que es razonable usar esto de *ansatz* para obtener soluciones de campo gravitatorio. Esta solución es una aproximación excelente para describir la gravedad de cuerpos con simetría esférica, es decir, planetas, estrellas, galaxias lo suficientemente bien distribuidas y, en un caso extremo, agujeros negros.

Ahora bien, también implica universo vacío, ¿cómo podríamos describir fenómenos gravitatorios si no hay nada sobre lo cuál trabajar? Esta confusión viene de llamar a la métrica de Schwarzschild como “solución en el vacío”, cuando en realidad es una “solución exterior”, esto quiere decir que es una solución *fuera* de un cuerpo, entonces tenemos un universo vacío, a excepción de la fuente del campo. Para describir el comportamiento de otro cuerpo en este universo, usamos *partículas de prueba*, las cuales se definen como objetos con características físicas despreciables, de tal forma que no alteran el campo sobre el que se mueven.

Con estas aclaraciones, conviene ver explícitamente esta solución, que en las coordenadas de Schwarzschild tiene la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1.5)$$

donde G es la constante de gravitación universal de Newton, M la masa de la fuente (del campo gravitacional) y c la velocidad en el vacío. Durante este trabajo se tomarán las unidades tales que $c = 1$, aunque se escribirá textualmente en ciertos casos cuando sea conveniente.

Esta solución cobra especial relevancia debido al llamado *Teorema de Birkhoff*, que establece que toda solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío debe ser estática y asintóticamente plana. O en otras palabras, establece la unicidad de Schwarzschild para soluciones exteriores en universos vacíos.

Vale la pena remarcar el porqué se especifica que la expresión (1.5) está en *coordenadas de Schwarzschild*. Esto se debe a que una misma solución a las ecuaciones de Einstein se puede expresar en distintas coordenadas, de la misma manera que podemos trabajar en un plano cartesiano usando coordenadas polares o coordenadas rectangulares. Esto podrá parecer de poca importancia, pero cobra relevancia cuando queremos estudiar a mayor profundidad ciertos aspectos geométricos de las métricas, que se revelan mediante el cambio de coordenadas a un sistema adecuado.

Analizando la forma de escribir esta solución debemos fijarnos en el término $r^2 d\Omega^2$, que es una forma compacta para los términos angulares que en su forma completa se

ven así: $r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2$.

Ambas formas de expresarlo son correctas, y podría argumentarse que es mejor escribir el término “completo”, sin embargo, en este trabajo se preferirá la notación compacta debido a que nos indica explícitamente que hay simetría esférica.

Otro aspecto importante aquí es que tenemos cocientes, de forma que si $r = 0$ o si $r = 2GM$ (recordemos que $c = 1$) las componentes g_{00} y g_{11} divergen respectivamente. Estas divergencias son un indicio de que hay una singularidad en esas regiones, sin embargo, veremos que la naturaleza de ambas es distinta.

La región caracterizada por $r = 2GM$ tiene muchos nombres. Se le suele llamar *horizonte de eventos*, *horizonte de Schwarzschild*, *superficie de Schwarzschild*, *radio de Schwarzschild*, *esfera de Schwarzschild* e incluso se le llegó a conocer como *singularidad de Schwarzschild*, nombre caído en desuso debido a que es incorrecto. A pesar de aparentar ser singular (se le llama singular a un punto cuando su curvatura va a infinito) esto es efecto completamente de las coordenadas que se utilizan para escribir la solución, como veremos más adelante.

En cambio, la zona con $r = 0$ describe una singularidad real, ya que no hay cambio de coordenadas posible que nos quite el problema de la divergencia de componentes del tensor métrico.

Propiedades

Analizando la métrica (1.5), podemos observar ciertas características que permiten entender mejor esta solución. Estas propiedades son:

- **Asintóticamente plano:** Se reduce a la solución de Minkowski (espacio plano) cuando r tiende a infinito, puesto que $(1 - 2GM/r) \rightarrow 1$.
- **Simetría esférica:** Esto se ve claro con el elemento $r^2 d\Omega^2$. Con esto presente, es común utilizar en los cálculos el hecho de que una partícula de prueba cayendo (u orbitando) se mantendrá en un plano, y si tomamos el plano ecuatorial, $\theta = \pi/2$, entonces podemos simplificar algunas expresiones, puesto que $\text{sen } \theta = 1$ y $d\theta = 0$. Esto nos deja (1.5) como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (1.6)$$

- **Circunferencia:** Con r y t constantes, obtenemos superficies de esferas con radio r . Estas secciones son cascarones esféricos con radio r , pero hay una sutileza. No es que haya una esfera con radio r , solo la superficie de esta. Una forma más clara de decirlo es que la circunferencia del cascarón esférico está dado por

$$\int r d\phi = 2\pi r \quad (1.7)$$

o que el área del cascarón es $4\pi r^2$. Este detalle es importante, pues r resulta ser una cantidad geométrica, no es la distancia desde el centro, como sucede cuando usamos coordenadas esféricas en espacio plano, sino que es un radio referido a las dimensiones del cascarón esférico correspondiente.

Esto no debe sorprender en demasía puesto que recordemos que en $r = 0$ la curvatura diverge, lo que afecta en las mediciones de distancia. Sin embargo, es importante aclararlo porque nos señala algo fundamental, las coordenadas en Relatividad General son etiquetas, cobran sentido físico al analizarlas, pero no se debe dar por sentado qué representan.

- **Corrimiento al rojo gravitacional:** Si consideramos un observador quieto en un cascarón (es decir, tomamos $dr = d\phi = 0$) vemos que ((1.6)) nos deja con

$$d\tau = \sqrt{|ds^2|} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r}} dt < dt, \quad (1.8)$$

entonces, hay dilatación temporal. El tiempo para el observador en el cascarón pasa más lento que el de un observador lejano, por lo tanto, la frecuencia de un rayo de luz será mayor para un observador lejano que para uno en el cascarón. Esto es, se tiene corrimiento al rojo gravitacional.

- **Curvatura:** De la misma forma, si medimos la distancia entre dos observadores que se encuentran en “cascarones cercanos” ($dt = d\phi = 0$) veremos que

$$ds = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r}}} > dr, \quad (1.9)$$

lo que indica que la distancia medida radialmente se va haciendo mayor al acercarse (por afuera) horizonte de eventos en $r = 2GM$. Esto es una manifestación de la curvatura.

Horizonte de eventos

Como hemos comentado previamente, una característica importante de la solución de Schwarzschild es su horizonte de eventos, ya que esta es una región en la que divergen elementos de la métrica, por lo que parecen ser una singularidad.

Para averiguar qué sucede en esta región, podemos analizar la estructura causal, la cuál se define mediante los conos de luz.

Entonces, consideramos curvas radiales nulas, es decir, consideramos ángulos constantes ($d\Omega = 0$) y $ds^2 = 0$, por lo que de (1.5) tenemos que:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0, \quad (1.10)$$

de donde observamos la relación

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}. \quad (1.11)$$

Lo que describe esta ecuación, es la pendiente de los conos de luz en un diagrama espacio-tiempo.

Los conos de luz nos sirven para estudiar la estructura causal, debido a que nada puede viajar más rápido que la luz, por lo tanto, todo lo que pueda influir causalmente en una partícula, debe estar dentro de su cono de luz.

Esto quiere decir que para que un evento haya tenido influencia sobre una partícula, este debe encontrarse en su cono de luz pasado.

Vemos que en el caso de Schwarzschild obtenemos una pendiente dependiente de r . Si nos encontramos lejos de la fuente de campo gravitacional (r grande), tenemos una pendiente de ± 1 , que es lo esperado para un espacio plano.

Sin embargo, conforme nos acercamos a $r = 2GM$, tenemos que $dt/dr \rightarrow \pm\infty$, lo que implica que los conos de luz comienzan “cerrarse”. Podemos ver este comportamiento en la gráfica 1.1.

Esto es, un rayo de luz que se aproxime a $r = 2GM$ parece nunca llegar, al menos visto por observador de Schwarzschild, y de hecho aparenta congelarse justo antes de cruzar. De este comportamiento se toma el nombre de *Estrella congelada* con el que se denotaba a los agujeros negros previamente.

El hecho de que en estas coordenadas nunca se pueda observar una partícula cruzar el horizonte de eventos es lo que define a esta región. Sin embargo esto no indica que

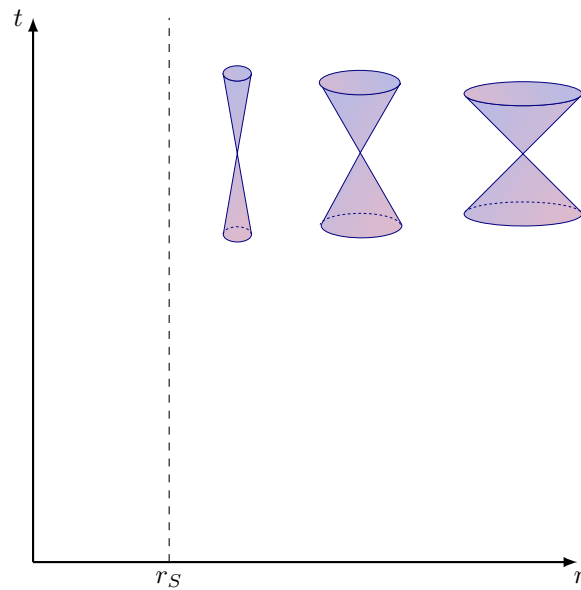


Figura 1.1: Conos de luz en las coordenadas de Schwarzschild. Conforme nos acercamos $r = 2GM$ estos se cierran.

la partícula nunca logre cruzar.

Para analizar si una partícula es capaz de cruzar esta región, debemos trabajar con coordenadas que se comporten mejor en esta región. En el siguiente capítulo analizaremos la causalidad de la geometría de Schwarzschild a detalle, para determinar si es posible cruzar el horizonte de eventos.

1.3.2. Solución de de Sitter

Otra de las primeras soluciones encontradas a las ecuaciones de Einstein, fue obtenida en 1917 por Willem de Sitter, y describe un universo sin materia, con curvatura constante positiva y dominado por la constante cosmológica Λ .

A diferencia del Universo de Einstein, formulado apenas un año antes, la solución de De Sitter es una solución cosmológica *dinámica*, i.e., describe un universo que cambia en el tiempo.

De Sitter describe un universo que se expande con el tiempo lo que supuso un adelanto de 12 años a las observaciones de Hubble, cuando finalmente se midió este efecto (ahora llamado *Ley de Hubble-Lemaître*).

Esta solución puede verse como una superficie cuadri-dimensional

$$-(x_0)^2 + (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + (x_4)^2 = \gamma, \quad (1.12)$$

en un espacio plano de 5 dimensiones

$$ds^2 = -(dx_0)^2 + (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 + (dx_4)^2, \quad (1.13)$$

donde, con las transformaciones adecuadas [9], llegamos a la forma

$$ds^2 = -dt^2 + e^{(2\Lambda/3)t}(dr^2 + r^2d\Omega^2). \quad (1.14)$$

Donde Λ es una constante positiva. Estudiemos la ecuación (1.14) para ver algunas características de esta métrica.

Propiedades

- **Plano a tiempos constantes.** Si analizamos rebanadas espaciales (fijamos $dt = 0$, como tomar una fotografía en un instante dado) nos encontramos con geometría plana, pues de (1.14):

$$ds^2 = e^{(2\Lambda/3)t}(dr^2 + r^2d\Omega^2), \quad (1.15)$$

que no es más que Minkowski reescalado por el factor $e^{(\Lambda/3)t}$.

- **Universo en expansión.** Si tomamos dos tiempos distintos $t_1 < t_2$, veremos que la escala en ambos será diferente, y dado que $e^{t_1} < e^{t_2}$, tendremos que el universo se ha expandido. Por esto llamamos *factor de escala* a la exponencial $e^{2(\Lambda/3)t}$.
- **Simetría esférica.** Como es usual, si tenemos el término $r^2d\Omega^2$ tenemos esta cualidad geométrica.

Una métrica relacionada a esta es la métrica de anti de Sitter, que describe un espacio-tiempo dominado por la constante cosmológica, pero este presenta curvatura constante negativa.

1.4. Transformaciones de coordenadas

Los sistemas de coordenadas en Relatividad General son un tema a tratar de forma delicada, puesto que su interpretación no siempre resulta inmediata, y su correcto manejo nos puede desvelar propiedades geométricas importantes de la solución a las ecuaciones de Einstein que estemos tratando. Un ejemplo directo de lo anterior sucede con los *vectores de Killing*. Cuando las componentes de la métrica son invariantes respecto al cambio en alguna de las coordenadas, tenemos una isometría explícita. Esto es, si x^{λ^*} es la coordenada de la que no depende explícitamente la métrica, entonces $\partial_{\lambda^*} g_{\alpha\beta} = 0$ en general. Se puede demostrar que la componente de cuadrivector (con índice abajo) en esa dirección p_{λ^*} es constante [10]. Esto permite, además de ver explícitamente una simetría del sistema, simplificar las ecuaciones resultantes. Un primer ejemplo simple proviene de la métrica invariante de Minkowski, la solución trivial a las ecuaciones de Einstein, lo anterior resulta en vectores de Killing asociados a las tres dimensiones espaciales, así como uno a cambios en el tiempo. En cambio, cuando se tienen coordenadas esféricas, se desvelan otros tres vectores de Killing asociados a la conservación de momento angular.

De manera similar, en coordenadas de Schwarzschild, se pueden ver directamente dos vectores de Killing asociados a la independencia de la métrica respecto al tiempo t y respecto a la coordenada ϕ , lo cuál a la vez induce a inferir otros dos vectores de Killing. Estos cuatro vectores de Killing se asocian a conservación de la energía y momento angular, lo que simplifica muchos cálculos y ayuda a profundizar en las propiedades de dicho espacio-tiempo. Por último, las métricas de de Sitter y anti de Sitter mencionadas antes, en su representación extradimensional muestran explícitamente contener el número máximo de vectores de Killing, que para dimensión n son $n(n+1)/2$, mientras que en la reducción dimensional que asociamos con modelos FLRW, resultan explícitamente menos. En todo esto, distintas formas de representar la métrica nos lleva a identificar de manera más o menos indirecta las mencionadas simetrías, vía vectores de Killing.

Hay distintas clasificaciones de coordenadas, las hay útiles en *parches* específicos del espacio-tiempo, que permiten un análisis detallado de alguna situación en concreto, como cuando las vinculamos a un tipo de observador. Ejemplos de estos pueden ser las coordenadas cercanas al horizonte, o aquellas coordenadas que podemos vincular directamente a observadores particulares, como lo son las de Gullstrand–Painlevé, ambos ejemplos para la solución de Schwarzschild [11].

Otras clases de coordenadas son apropiadas para visualizar la geometría del espacio, en diagramas de sumergimiento (curvatura)[12], diagramas de Kruskal (extensión de las solución)[13–15] o diagramas de Penrose (representación compacta de todo el espacio-tiempo) [16].

Y otra clase permite ver la continuidad del espacio, como las coordenadas de Lemâitre, entre otras, lo hace para Schwarzschild. Esta no es una división categórica ni extensiva de todo tipo de coordenadas, pues algunas por sus propiedades pueden pertenecer a más de una categoría, pero nos permite expresar la variada utilidad de las coordenadas en la Relatividad General.

Hemos presentado dos soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein, ambas con la característica de tener simetría esférica. En este trabajo se estudiarán a fondo ambas soluciones mediante distintas transformaciones de coordenadas, que permitan mejorar la comprensión de estas métricas.

Capítulo 2

Métrica de Schwarzschild

2.1. Introducción

En el capítulo anterior se trataron los aspectos principales de esta solución, analizando exclusivamente su formulación

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.1)$$

donde hemos tomado que $c = 1$.

Ahora veremos cómo podemos ampliar la comprensión de estos espacios a partir de cambios de coordenadas. Para ello, comencemos con un ejemplo ilustrativo, analizando el caso límite $r \rightarrow r_S = 2GM$.

2.1.1. Coordenadas de Rindler

Comenzamos el estudio a partir de cambio de coordenadas, con las *coordenadas de Rindler* (también llamada *cercanas al horizonte*). Estas toman su nombre debido a la semejanza que tienen con la solución de Rindler, la cual representa a un observador en un espacio de Minkowski con aceleración constante.

Para obtener estas coordenadas, comenzamos cambiando la coordenada r , por ρ , que mide la distancia propia desde el horizonte (r_S). Recordemos, en espacio curvo la distancia propia l entre dos eventos a lo largo de una trayectoria se obtiene a partir de la métrica $g_{\mu\nu}$ con la expresión

$$l = \int_{\text{tray}} \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}, \quad (2.2)$$

así pues, ρ medirá en la trayectoria radial (con solo la componente radial $g_{rr} \neq 0$) desde el horizonte $r_S = 2GM$ hasta r , entonces:

$$\begin{aligned} \rho &= \int_{r_S}^r \sqrt{g_{rr}(r')} dr', \\ &= \int_{r_S}^r \left(1 - \frac{r_S}{r'}\right)^{-1/2} dr'. \end{aligned} \quad (2.3)$$

realizando la integración llegamos a la solución,

$$\rho = \sqrt{r^2 - 2GM r} + 2GM \operatorname{arcsen} h \left(\sqrt{\frac{r}{r_S} - 1} \right), \quad (2.4)$$

y directamente en términos de ρ , la métrica (2.1) toma la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r(\rho)}\right) dt^2 + d\rho^2 + r^2(\rho) d\Omega^2, \quad (2.5)$$

donde r es una función de ρ .

Con este elemento de línea, nos acercamos al horizonte, i.e, $r \rightarrow r_S$. Por lo que ρ se aproxima a

$$\rho \approx 2\sqrt{r_S(r - r_S)}, \quad (2.6)$$

de donde despejamos y sustituimos en (2.4) para obtener

$$ds^2 \approx - \left(\frac{\rho}{2r_S}\right)^2 dt^2 d\rho^2 + r^2(\rho) d\Omega^2. \quad (2.7)$$

Además, si nos limitamos a una pequeña región angular, centrada arbitrariamente en $\theta = 0$, podemos reemplazar las coordenadas angulares por coordenadas cartesianas

$$\begin{aligned} x &= r_S \theta \cos \phi, \\ y &= r_S \theta \sin \phi, \end{aligned} \quad (2.8)$$

e introducimos el tiempo adimensional ω

$$\omega \equiv \frac{t}{2r_S}, \quad (2.9)$$

que al sustituir en (2.7) nos da la métrica de la forma

$$ds^2 = -\rho^2 d\omega^2 + d\rho^2 + dx^2 + dy^2. \quad (2.10)$$

Es decir, la métrica toma la forma de la solución de Rindler, la cuál representa un marco de referencia sometido a una aceleración constante en un espacio-tiempo plano. De esta comparación, podemos ver que ρ y ω son la variable angular y el ángulo hiperbólico en el espacio de Minkowski ordinario [17].

Las coordenadas de Minkowski se pueden definir por

$$\begin{aligned} T &= \rho \sinh \omega, \\ Z &= \rho \cosh \omega, \end{aligned} \quad (2.11)$$

lo que dejaría la métrica de Minkowski en la forma común,

$$ds^2 = -dT^2 + dZ^2 + dX^2 + dY^2. \quad (2.12)$$

Esto es, mediante una transformación de coordenadas y aproximaciones propias de un análisis a la región cercana al horizonte de eventos, hemos obtenido una forma de la ecuación de Schwarzschild plana. Aunque no debemos olvidar que esta forma se obtuvo mediante aproximaciones, por lo que solo será adecuada para describir la zona cerca a $r = r_S$ y para una región angular pequeña.

Así pues, hemos obtenido una expresión de la métrica que no solo demuestra que el horizonte de eventos no representa una singularidad, sino que esta región será localmente indistinguible del espacio plano, para agujeros negros grandes.

Es decir, un observador A puede cruzar el horizonte de eventos de un agujero negro supermasivo y ni siquiera sentir este cambio. Un observador lejano B verá cosas raras, como que el observador A se congela en las inmediaciones del horizonte de eventos (tal como hemos descrito en el capítulo anterior), sin embargo, en su marco de referencia el observador A puede no notar nada especial al cruzar esta zona.

Análisis como este descrito ilustran la utilidad de las transformaciones de coordenadas para analizar casos límites.

2.2. Transformaciones conformes

Un tipo especial de transformación de coordenadas, son las llamadas *conformes*; En esencia, consisten en un cambio de escala, y como las distancias se miden con la métrica, estas transformaciones se implementan multiplicando el tensor métrico por un *factor conforme* ω^2 , que depende de las coordenadas mismas,

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \omega^2(x)g_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

o equivalentemente,

$$\tilde{d}s^2 = \omega^2(x)ds^2, \quad (2.14)$$

para alguna función $\omega(x)$ no nula (Aquí x denota las coordenadas x^μ). Nótese que la transformación conforme inversa es trivial: $g_{\mu\nu} = \omega^{-2}\tilde{g}_{\mu\nu}$.

Una característica importante de las transformaciones conformes es que las curvas nulas son invariantes ante estas transformaciones, lo a su vez nos indica que los conos de luz serán invariantes, manteniendo la causalidad entre transformaciones.

Este tipo de transformaciones tiene varias aplicaciones en Relatividad General; la más pertinente para este trabajo será la de permitirnos analizar de forma global un espacio, o compactificarlo en *diagramas de Penrose*.

Así pues, existe la propiedad en las métricas de ser *conforme plano*, lo que implica que pueden ser escritas de la forma

$$g_{\mu\nu} = \Omega^2\eta_{\alpha\beta}, \quad (2.15)$$

bajo alguna transformación de coordenadas adecuada. Aquí Ω es el factor conforme, y $\eta_{\alpha\beta}$ corresponde a la métrica plana (Minkowski).

Demostramos en el apéndice (A) que toda métrica bidimensional es conforme plana, lo que no excluye cortes de las secciones radial y temporal en las métricas que estamos tratando. Es decir, siempre que consideremos ángulos constantes, es posible escribir las métricas de Schwarzschild y de De Sitter en forma conforme.

Dentro de las transformaciones conformes hay un gran número que son relevantes. Algunas de las que son conforme planas en las coordenadas radial y temporal son:

- **Tortoise:** Consiste en transformar la coordenada radial para que sea conforme con la temporal, llevándose a la forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) (-dt + dr^*), \quad (2.16)$$

donde r^* es la llamada *coordenada de Tortoise*. Su utilidad se hace evidente al aproximarse al horizonte de eventos, pues muestra claramente que no es una singularidad.

- **Kruskal-Szekeres:**(1960) La solución máximamente extendida, representa

$$ds^2 = \frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM} (-dT^2 + dR^2) + r^2 d\Omega^2 \quad (2.17)$$

Veamos un ejemplo de transformación conforme, a manera de introducción a ellas.

2.2.1. Coordenadas isotrópicas

La métrica de Schwarzschild puede ser expresada en coordenadas isotrópicas, las cuales son conforme planas en hipersuperficies con tiempo constante. Es decir, pasamos de la expresión (2.1) a nuestro ansatz para la transformación, que es:

$$ds^2 = -A(\rho)^2 dT^2 + B(\rho)^2 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \quad (2.18)$$

aplicamos las reglas para transformar el tensor métrico,

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

donde consideramos (2.1) como $g_{\mu\nu}$ en coordenadas x^μ que son (t, r, θ, ϕ) , y queremos llegar a la nueva expresión de la métrica $\gamma_{\alpha\beta}$ en coordenadas (T, ρ, θ, ϕ) . Esta es una ecuación tensorial, y como la métrica posee 16 elementos, en realidad tenemos 16 ecuaciones.

Sin embargo, podemos reducir los cálculos tomando en cuenta las simetrías del ansatz y de la métrica en coordenadas de Schwarzschild.

Trabajamos con una métrica, entonces se exige simetría en el cambio de índices, es decir, que su representación matricial sea simétrica, lo que reduce sus componentes independientes a 10 (cuatro diagonales y seis del triángulo superior). Además, en (2.18) observamos que se mantiene la simetría esférica, así como los ángulos θ y ϕ , de forma que se exige que $B^2 \rho^2 = r^2$, y nos permite reducir nuestras ecuaciones a solo tres, las

que transforman las coordenadas $(t, r) \rightarrow (T, \rho)$

Así, de (2.19) obtenemos las ecuaciones

$$\gamma_{00} = \left(\frac{\partial t}{\partial T} \right)^2 g_{00} + \left(\frac{\partial r}{\partial T} \right)^2 g_{11}, \quad (2.20)$$

$$\gamma_{11} = \left(\frac{\partial t}{\partial \rho} \right)^2 g_{00} + \left(\frac{\partial r}{\partial \rho} \right)^2 g_{11}, \quad (2.21)$$

$$\gamma_{01} = \left(\frac{\partial t}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial t}{\partial \rho} \right) g_{00} + \left(\frac{\partial r}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial \rho} \right) g_{11}, \quad (2.22)$$

desarrollando las ecuaciones, y sustituyendo (1.5), (2.18) y pasando a la notación del punto y el primado para las parciales respecto a ρ y T ,

$$-A^2 = \dot{t}^2(-f) + \dot{r}^2 f^{-1}, \quad (2.23)$$

$$B^2 = t'^2(-f) + r'^2 f^{-1}, \quad (2.24)$$

$$0 = \dot{t}t'(-f) + \dot{r}r'f^{-1}, \quad (2.25)$$

donde $f = 1 - 2GM/r$. Ahora, recordamos que $r = B\rho$, de forma que $\dot{r} = 0$. Sustituyendo obtenemos

$$-A = -f\dot{t}^2, \quad (2.26)$$

$$t'^2 = f^{-2}[r'^2 - B^2 f], \quad (2.27)$$

$$f\dot{t}t' = 0, \quad (2.28)$$

entonces, $\dot{t} \neq 0$, esto implica que $t' = 0$. Así,

$$r' = B\sqrt{f}, \quad (2.29)$$

sustituimos el valor de f , lo que nos lleva a la ecuación

$$Bd\rho = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2Gm}{r}}}, \quad (2.30)$$

que integramos para resolver,

Tras los cálculos pertinentes, llegamos a que la nueva coordenada es

$$\rho = \frac{r - M \pm \sqrt{(r - M)^2 - M^2}}{2}, \quad (2.31)$$

lo que nos lleva a reescribir el elemento de línea como:

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - \frac{M}{2\rho}}{1 + \frac{M}{2\rho}} \right)^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2\rho} \right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \quad (2.32)$$

donde vemos que, a pesar de tener cocientes, los divisores son sumas, lo que hace que el horizonte de eventos deje de verse como una singularidad. Sin embargo, $\rho = 0$ se mantiene como una singularidad real.

2.3. Extendiendo el espacio

Un cambio de coordenadas no necesita justificarse, es suficiente con indicar las transformaciones y realizarlas. Sin embargo, es útil ver el razonamiento detrás de la transformación elegida, ya que esto nos permite plantearnos modificaciones que puedan traer consecuencias relevantes.

En este capítulo obtendremos las llamadas coordenadas de Kruskal-Szekeres, las cuales son útiles para visualizar la geometría global de la solución de Schwarzschild, y presenta un caso de extensión del espacio-tiempo, como veremos a continuación. El camino tradicional para obtener la métrica de Schwarzschild en estas coordenadas consiste en considerar solo el aspecto radial (pues la simetría esférica debe conservarse), y hacer una transformación conforme para las coordenadas.

En este trabajo seguimos y ampliamos formalismo desarrollado en un artículo del 2019 [18].

2.3.1. Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Partimos del elemento de línea en coordenadas de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.33)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío, G la constante de gravitación universal

de Newton y M la masa de la fuente del campo gravitacional.

Por simplicidad de los cálculos, tomaremos $c = 1$, y se tomarán trayectorias radiales nulas, de forma que nos centramos en los primeros dos términos y dejamos intacto el $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, asegurando así la simetría esférica. Además, definimos $r_S \equiv 2GM$, de forma que trabajamos con

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad (2.34)$$

primero, pasamos a escribirlo de forma conforme,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) [-dt^2 + dr^{*2}], \quad (2.35)$$

donde dr^* debe cumplir

$$dr^* = \frac{\lambda dr}{\left(1 - \frac{r_S}{r}\right)}, \quad (2.36)$$

con $\lambda = \pm 1$. Ahora integramos para obtener r^* ,

$$r^* = \lambda \left(r + r_S \log \left[\eta \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right) \right] + C \right), \quad (2.37)$$

donde $\eta \pm 1$ nos indica si estamos trabajando en el interior o exterior del horizonte de eventos. Por conveniencia, reescribimos la constante de integración de forma que tenemos

$$r^* = \lambda r + \lambda r_S \log \left[\eta \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right) \right] + \lambda r_S \log \epsilon^2, \quad (2.38)$$

donde $\epsilon = \pm 1$. Estamos añadiendo un cero con unidades adecuadas. Ahora, si manipulamos un poco este término,

$$\begin{aligned} \frac{\lambda r^*}{r_S} &= \frac{r}{r_S} + \frac{1}{2} \log \left[\eta \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right) \right] + \frac{1}{2} \log \epsilon^2, \\ e^{\frac{\lambda r^*}{r_S}} &= \epsilon \cdot e^{\frac{r}{r_S}} + \left[\eta \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right) \right]^{1/2}, \\ \frac{r}{r_S} - 1 &= \eta \epsilon^2 e^{\frac{\lambda r^*}{r_S}} e^{-\frac{r}{r_S}}, \end{aligned}$$

obtenemos

$$1 - \frac{r_S}{r} = \eta\epsilon^2 \left(\frac{r_S}{r}\right) e^{\frac{\lambda r^*}{r_S}} e^{-\frac{r}{r_S}}, \quad (2.39)$$

así pues, podemos escribir el elemento de línea en (2.35) como

$$ds^2 = \left[\eta\epsilon^2 \left(\frac{r_S}{r}\right) e^{\frac{\lambda r^* - r}{r_S}} \right] [-dt^2 + dr^{*2}]. \quad (2.40)$$

Ahora, hacemos una transformación a coordenadas nulas u y v , dadas por

$$\begin{aligned} u &= t + r^*, \\ v &= t - r^*, \end{aligned} \quad (2.41)$$

y vemos que

$$dudv = (dt + dr^*)(dt - dr^*), \quad (2.42)$$

lo que nos lleva a reescribir (2.40) cómo

$$ds^2 = - \left[\eta\epsilon^2 \left(\frac{r_S}{r}\right) e^{-\frac{r}{r_S}} \right] e^{\frac{\lambda(u-v)}{2r_S}} dudv, \quad (2.43)$$

y cambiamos de nuevo las coordenadas a

$$\begin{aligned} U &= e^{\frac{\lambda u}{2r_S}}, \\ V &= e^{-\frac{\lambda v}{2r_S}}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

donde

$$dUdV = -\frac{\lambda^2}{4r_S^2} e^{\frac{u-v}{2r_S}} dudv, \quad (2.45)$$

con lo que podemos escribir (2.43) de la forma

$$ds^2 = \left[\eta\epsilon^2 \lambda^2 e^{-\frac{r}{r_S}} \right] \left(\frac{4r_S^3}{r} \right) dUdV, \quad (2.46)$$

y aquí, introducimos nuestras nuevas coordenadas

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(U + \xi V) \\ T &= \frac{1}{2}(U - \xi V) \end{aligned} \quad (2.47)$$

que cumplen

$$-dT^2 + dX^2 = \xi dU dV$$

de forma que (2.46) se escribe de la forma

$$ds^2 = [\eta \epsilon^2 \lambda^2 e^{-\frac{r}{r_S}}] \xi \left(\frac{4r_S^3}{r} \right) (-dT^2 + dX^2) \quad (2.48)$$

ahora bien, para obtener X y T en términos de los r y t originales, necesitamos revertir el proceso, usando (2.41) y (2.44) en (2.47), obtenemos

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} \epsilon \left[\eta \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right) \right]^{1/2} e^{\frac{r}{2r_S}} \left[e^{\frac{\lambda t}{2r_S}} + \xi \cdot e^{\frac{-\lambda t}{2r_S}} \right] \\ T &= \frac{1}{2} \epsilon \left[\eta \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right) \right]^{1/2} e^{\frac{r}{2r_S}} \left[e^{\frac{\lambda t}{2r_S}} - \xi \cdot e^{\frac{-\lambda t}{2r_S}} \right] \end{aligned} \quad (2.49)$$

que son nuestras coordenadas de Kruskal más generales. Tenemos cuatro variables con valores dicotómicos, $\epsilon, \eta, \lambda, \xi = \pm 1$, de forma que tenemos 16 opciones para esta transformación. Sin embargo, gran parte de estas transformaciones son equivalentes, lo que nos lleva a solo 4 opciones independientes que consisten en la extensión completa para la solución de Schwarzschild. Estas coordenadas son:

$$(I) \begin{cases} X = \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_S} \cosh \left(\frac{t}{2r_S} \right), \\ T = \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_S} \sinh \left(\frac{t}{2r_S} \right), \end{cases} \quad (2.50)$$

$$(II) \begin{cases} X = \left(1 - \frac{r}{r_S} \right)^{1/2} e^{r/2r_S} \sinh \left(\frac{t}{2r_S} \right), \\ T = \left(1 - \frac{r}{r_S} \right)^{1/2} e^{r/2r_S} \cosh \left(\frac{t}{2r_S} \right), \end{cases} \quad (2.51)$$

$$(III) \begin{cases} X = - \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_S} \cosh \left(\frac{t}{2r_S} \right), \\ T = - \left(\frac{r}{r_S} - 1 \right)^{1/2} e^{r/2r_S} \sinh \left(\frac{t}{2r_S} \right), \end{cases} \quad (2.52)$$

$$(IV) \begin{cases} X = \left(1 - \frac{r}{r_S}\right)^{1/2} e^{r/2r_S} \sinh\left(\frac{t}{2r_S}\right), \\ T = \left(1 - \frac{r}{r_S}\right)^{1/2} e^{r/2r_S} \cosh\left(\frac{t}{2r_S}\right). \end{cases} \quad (2.53)$$

Estas coordenadas presentan varias características que las vuelven fundamentales en el estudio de la solución de Schwarzschild [19]. Tales como tener las curvas radiales como en el espacio plano, es decir,

$$T = \pm X + \text{constante}, \quad (2.54)$$

además, no presentan singularidad en la región $r = r_S$, como lo hacen las coordenadas usuales, ni tampoco manda a infinito esa región, como lo hace Tortoise. De hecho el horizonte está definido por

$$T = \pm X, \quad (2.55)$$

donde se aprecia que no es más que una superficie nula ¹.

Podemos considerar las superficies a r constante, estas satisfarán la expresión

$$T^2 - X^2 = \text{constante}, \quad (2.56)$$

por lo que aparecen como hipérbolas en el plano $T - X$. No solo eso, sino que las superficies a t constante cumplen

$$\frac{T}{X} = \tanh\left(\frac{1}{4GM}\right), \quad (2.57)$$

que son líneas rectas que cruzan el origen. Representando las cuatro regiones en un mismo diagrama, e ilustrando las superficies a t y r constantes obtenemos el llamado diagrama de Kruskal [20].

En la Figura 2.1 podemos observar las cuatro regiones que se obtienen a partir de la solución de Schwarzschild. Nótese que etiquetamos los pares de coordenadas de (2.50) a (2.53) de las forma que coinciden con las etiquetas puestas en el diagrama.

La región I corresponde a $r > r_S$, que es la región descrita en las coordenadas originales (t, r) y aquí representan solo una sección del espacio-tiempo. Siguiendo trayectorias a futuro, vemos que se puede cruzar el horizonte $r = r_S$ y se llega a la región II , la cual cumple con $r < r_S$ pero presenta una singularidad en $r = 0$, es decir, corresponde al interior del agujero negro. Una vez dentro de la región II , toda trayectoria a

¹Una superficie nula, es una hipersuperficie generada por vectores tipo luz.

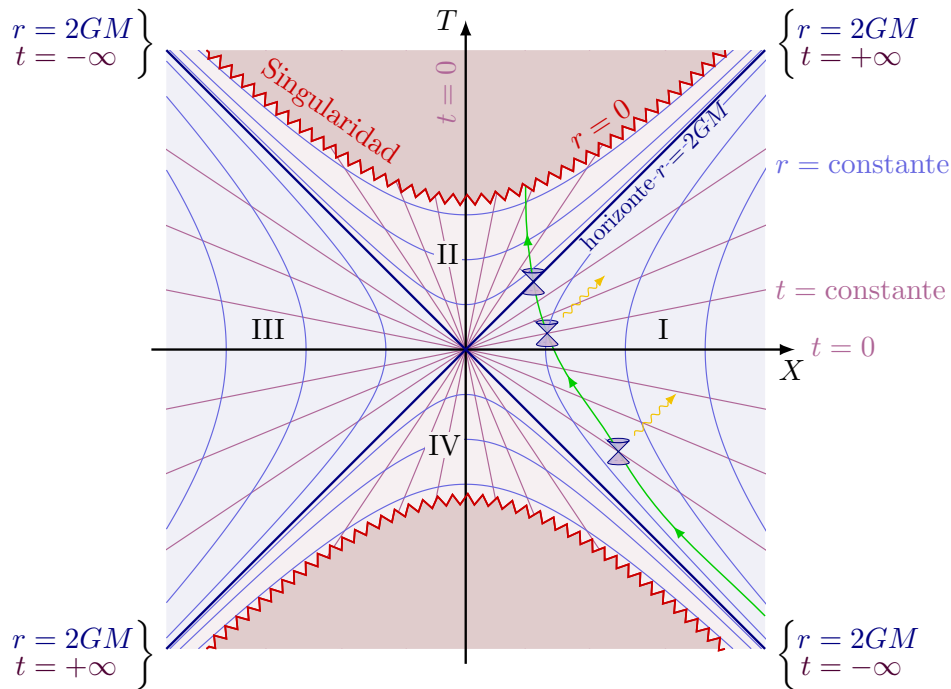


Figura 2.1: Diagrama de Kruskal-Szekeres, donde se muestra la estructura causal de Schwarzschild maximalmente extendido. Figura modificada a partir de <https://tikz.net/category/physics/relativity/>

futuro se acerca a la singularidad $r = 0$, lo que es consistente con la idea de agujero negro que tenemos. Es decir, no solo no se puede salir de la región *II* una vez entrado en ella, sino que es inevitable entrar en una trayectoria donde r disminuya.

Ahora bien, hemos descrito apenas dos de las regiones obtenidas con la transformación de Kruskal, y no solo se ha retratado el espacio-tiempo de las coordenadas (t, r) en Schwarzschild, sino que se ha extendido a la región del interior del agujero negro que ya quedaba fuera de los límites de la solución. Sin embargo, aún nos restan 2 regiones por describir. Su naturaleza puede ser un tanto contraintuitiva.

La región *III* comparte las características de la región *I*, siendo una región asintóticamente plana desde la cuál las trayectorias a futuro le permiten cruzar a la región *II*, sin embargo, se mantiene desconectada causalmente de la región *I*. Por lo que podemos interpretarla como una especie de región espejo a la nuestra.

Y finalmente, la región *IV* es similar a la región *II*, pero con el horizonte de eventos en el pasado, es decir, es como una región *II* con el tiempo invertido, lo que se conoce como agujero blanco [21]. De la misma manera que en el agujero negro es imposible

para una partícula salir una vez se entra en la región $r < 2GM$, es imposible para una partícula volver al interior de un agujero blanco una vez que sale, ya que el horizonte siempre quedará en su cono de luz pasado.

2.3.2. Diagramas conformes

Hemos visto cómo una transformación de coordenadas nos puede llevar a una representación gráfica de la geometría global del espacio-tiempo. Sin embargo, por más grato que parezca este diagrama, resulta útil hacer un cambio de coordenadas más para colapsar toda la solución de Schwarzschild en una región finita.

Con las transformaciones

$$v'' = \arctan\left(\frac{V}{\sqrt{2GM}}\right), \quad (2.58)$$

$$u'' = \arctan\left(\frac{U}{\sqrt{2GM}}\right), \quad (2.59)$$

obtenemos coordenadas con los rangos

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} < v'' < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} < u'' < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{\pi}{2} < v'' + u'' < \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

que nos permite obtener el diagrama de Carter-Penrose.

Es evidente la similitud entre los diagramas de Kruskal y de Penrose para la solución de Schwarzschild, pues describen las mismas regiones. La diferencia viene en el rango de las coordenadas, donde en el diagrama de Kruskal se extienden a infinito mientras que el de Penrose están acotadas, compactificando la gráfica.

Esta compactificación nos permite visualizar toda la geometría del espacio, y posee la característica de preservar la forma de los conos de luz. Es decir, podemos analizar causalidad de forma visual, directamente del diagrama.

De nuevo vemos las características regiones I y II , que son el exterior y el interior del agujero negro respectivamente. Si seguimos la trayectoria de una partícula que pase de la región I a la región II , todos los conos de luz colapsarán a la línea que representa

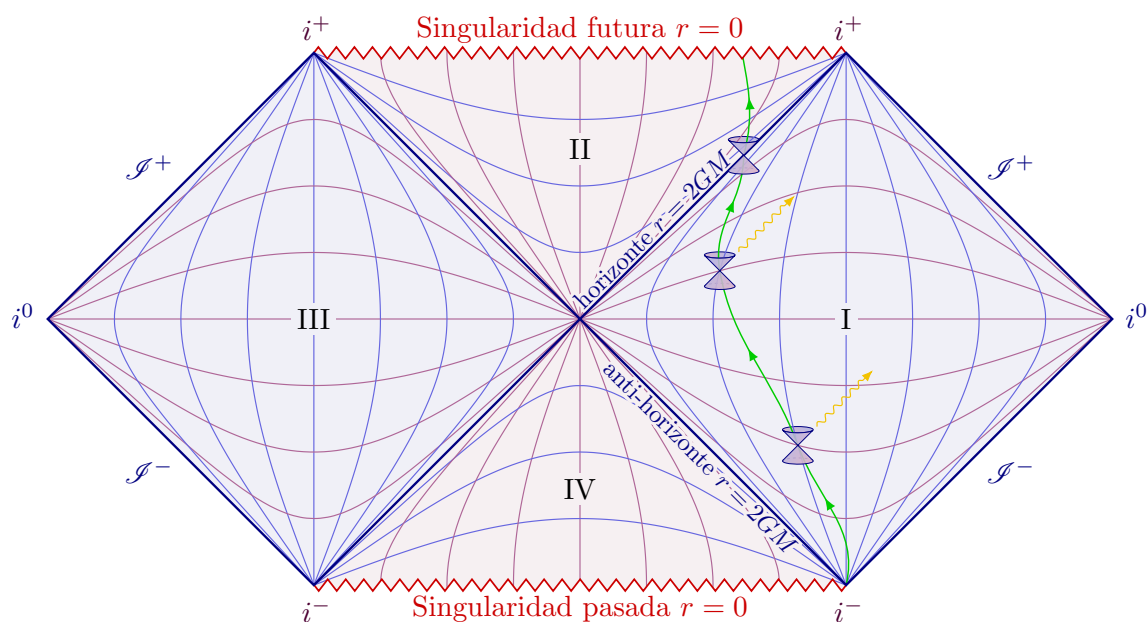


Figura 2.2: Diagrama de Penrose

$r = 0$, es decir, es imposible escapar de esta región.

Y de la misma forma que en Kruskal, se observa el surgimiento de una región análoga a la región I , pero desconectada causalmente de esta. Algo valioso de esta representación es que enfatiza aún más la similitud de estas dos regiones desconectadas, pues preservan la misma forma y los mismos horizontes.

La verdadera sutileza de este diagrama viene de los diversos puntos que aparecen. i^+ e i^- representan infinito temporal futuro y pasado, respectivamente. i^0 representa el infinito espacial. Estos son puntos.

Sin embargo \mathcal{I}^+ y \mathcal{I}^- son superficies nulas. Toda geodésica temporal empieza en i^- y termina en i^+ . Toda geodésica nula comienza en \mathcal{I}^- y termina en \mathcal{I}^+ . Y finalmente, toda geodésica espacial comienza y termina en i^0 .

Capítulo 3

Cosmología

3.1. Introducción

La cosmología es, en pocas palabras, el estudio del Universo. La cosmología relativista es el estudio de soluciones a las ecuaciones de Einstein que pueden describir al universo.

Cabe aclarar que no cualquier solución a las ecuaciones de Einstein puede representar un modelo cosmológico, puesto que conocemos detalles de nuestro universo que debemos incorporar en las teorías para que tenga sentido el considerarlas como aceptables.

Uno de estas restricciones que debemos incluir, es la llamada *paradoja de Olbers*. Es decir, debemos poder responder a una pregunta aparentemente sencilla.... ¿Por qué el cielo nocturno es oscuro? Podrá parecer trivial, pero en un universo euclidiano, infinito y con distribución uniforme (de estrellas) nos llevaría a una luminosidad infinita [22], [23].

Hay varias maneras de evitar este problema, tales como tener un modelo de universo finito, o con distribución no uniforme de estrellas, o un universo dinámico que cambie en el tiempo. Lo importante es que debe de resolverse esta problemática en cualquier modelo cosmológico que quiera proponerse.

Otra consideración común para nuestro universo es considerar el llamado *Principio cosmológico* el cual establece que no estamos en un lugar privilegiado, sino que el universo es el mismo para cualquier punto. Estas propiedades se resumen en que el universo es homogéneo e isotrópico [24].

La isotropía nos indica que el universo es igual en cualquier dirección, es decir, un observador recibe la misma evidencia experimental sin importar la dirección en la que

observe.

Homogeneidad implica que cada observador observa los mismos sin importar en que lugar del cosmos se encuentre.

Ninguna de estas características parece cumplirse a pequeñas escalas. Por ello se considera que se cumple a escalas cosmológicas, de al menos 100 Megapársecs.

3.1.1. Métrica de FLRW

Una solución exacta a las ecuaciones de Einstein que cumple con las condiciones previamente mencionadas es la métrica de *Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker*, que toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad (3.1)$$

donde $a(t)$ es un parámetro de escala dependiente del tiempo cosmológico t , y k es una constante de curvatura que determina la topología del universo, esta acepta los valores $-1, 0, 1$.

Las coordenadas espaciales se conocen como comóviles, debido a que al multiplicar por el factor de escala se captura la idea de que dichas coordenadas tienen un valor fijo para observadores que se dejan arrastrar por la expansión del universo. Así, en lugar de tener galaxias en movimiento unas con respecto a otras, se da énfasis en la interpretación de que es el espacio el que se expande, una manera más natural de incorporar el principio cosmológico con relatividad.

En esta métrica se describe un universo dinámico, donde la tasa de crecimiento universo se ve determinado por el factor de escala $a(t)$. Podemos hacer la analogía de que el universo está sobre la superficie de un globo, cuyo radio depende de este factor de escala.

Aunque esta comparativa es más acertada para el caso $k = 1$, la analogía no es completa en el sentido de que en la superficie bidimensional parece haber alguna dependencia en un centro preferente, al hacer el sumergimiento en una dimensión superior.

Podemos considerar a esta solución como la base del estudio de la cosmología, debido a que si consideramos al universo como un fluido perfecto tendremos el tensor energía-momento,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

donde p es la presión, ρ es la densidad y $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ es la cuadri-velocidad. Y volviendo a las ecuaciones de Campo que podemos escribir como,

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}), \quad (3.3)$$

calculando el término $\mu\nu = 00$ obtenemos la ecuación

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p).$$

Y de los términos $\mu\nu = ij$ obtenemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{\kappa}{a^2} = 4\pi G(\rho - p).$$

Utilizando la primera de estas ecuaciones para cancelar términos en la segunda, y con un poco de álgebra, obtenemos las llamadas *ecuaciones de Friedmann*

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.5)$$

que describen la dinámica y evolución del universo.

Toda métrica que tenga la forma (3.1) y que obedece estas ecuaciones forma parte de la familia de *Universos FLRW*. En ocasiones se le llama a la ecuación (3.4) la ecuación de Friedmann [25], debido en parte a que si se conoce la dependencia de ρ con a , con solo esta ecuación podemos obtener a . Y la ecuación (3.5) es llamada la segunda ecuación de Friedmann, o ecuación de aceleración.

Vemos que estas relaciones forman un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, es decir, se presentan tres parámetros libres. Para poder resolver este sistema de ecuaciones, podemos considerar una *ecuación de estado*, que relacione los parámetros ρ y p . Como estamos considerando que el universo es un fluido perfecto, podemos tomar la ecuación

$$p = w\rho \quad (3.6)$$

donde w es una constante independiente del tiempo. A esta ecuación también se le puede llamar *ecuación barotrópica*, y w se denomina el factor barotrópico.

Antes de seguir con el análisis, resulta útil considerar el componente cero de la ecuación de conservación de energía, tomando $T_{\mu\nu}$ de (3.2), tomamos la relación $\nabla_\mu T^\mu_0$, que nos lleva a la expresión

$$-\partial_0 \rho - 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0, \quad (3.7)$$

y considerando la ecuación de estado (3.6),

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w) \frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.8)$$

Integrando obtenemos

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^{3(1+w)}}, \quad (3.9)$$

una expresión que nos sirve para obtener ρ al considerar una w . Podemos ahora considerar valores razonables para w .

Si pensamos en un universo dominado por materia, consideramos un conjunto de partículas no relativistas que no colisionan entre sí, esto nos lleva a que tienen presión cero. Entonces, de (3.6) tenemos $w = 0$ y,

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^3}, \quad (3.10)$$

lo que podemos interpretar como una densidad que disminuye al mismo ritmo que el volumen del universo aumenta, debido su expansión. Es lo esperable para la densidad de materia.

Pero sabemos que nuestro universo no solo contiene materia, sino que también tiene radiación. Esta puede ser radiación electromagnética o partículas masivas con velocidades relativistas, ya que estas corresponderían a la misma ecuación de estado.

Recordemos que el tensor de energía-momento para el electromagnetismo está dado por

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F^\nu_\lambda - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}, \quad (3.11)$$

y su traza es cero. Además, esta traza debe corresponder a la traza del tensor dado

para un fluido perfecto, entonces,

$$-\rho + 3p = 0, \quad (3.12)$$

$$p = \frac{\rho}{3}. \quad (3.13)$$

Volviendo a la ecuación de estado (3.6), corresponde a un $w = 1/3$, por lo que,

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^4}, \quad (3.14)$$

es decir, la densidad de energía de radiación decrece a mayor ritmo que la de materia. Podemos interpretar esto como que la densidad de los fotones decrece al mismo ritmo que la densidad de la materia, sin embargo conforme el universo se expande, los fotones experimentan un corrimiento al rojo, es decir, pierden energía, lo que incrementa esta pérdida en un término proporcional a a^{-1} , lo que lo lleva a la expresión completa de a^{-4} .

Esto nos lleva a pensar que, a pesar de tener una mayor densidad de materia que de radiación en la actualidad, en el universo temprano esto no debió ser así, y cuando el universo era de mucho menor tamaño, la radiación debió ser el elemento dominante.

Además de materia y radiación, hay un elemento más en el universo. Materia Oscura. La energía oscura se puede interpretar como la energía del vacío, y genera la expansión acelerada del universo. Tomándolo en términos de la ecuación de estado, es un fluido perfecto con presión negativa, de (3.6), $p = -\rho$, es decir, $w = -1$. Esto es,

$$\rho = \rho_0 \quad (3.15)$$

por lo que la densidad de energía es constante.

Esto quiere decir que aunque el universo se esté expandiendo, la densidad de energía de vacío no cambia, por lo que eventualmente toda métrica de FLRW con constante cosmológica será dominada por la energía de vacío, es decir, será descrita por la métrica de de Sitter (y anti de Sitter). Lo que deja a estas métricas como casos asintóticos del resto de soluciones FLRW (con Λ), y es el motivo por el cuál decimos que nuestro universo es asintóticamente de Sitter.

Por completez, podemos considerar qué elemento del espacio-tiempo nos falta describir. En las ecuaciones de Friedmann aparece un factor que no hemos caracterizado, este es el de la curvatura. Recordemos que κ representa la curvatura espacial en la

métrica de FLRW. Esta queda representada por un valor de $w = -1/3$, que nos da la relación

$$\rho = \frac{\rho_0}{a^2}, \quad (3.16)$$

es decir, corresponde a una densidad que se diluye conforme el universo se expande, pero lo hace a menor velocidad que las densidades de la materia o radiación.

Entonces, podemos resumir el comportamiento de las fuentes de densidad de energía más comunes en la siguiente tabla:

	w	n
Materia	0	3
Radiación	$\frac{1}{3}$	4
Curvatura	$-\frac{1}{3}$	2
Vacío	-1	0

Tabla 3.1: Valores normales para el parámetro barotrópico w

donde n representa el exponente en la relación $\rho \propto a^{-n}$.

Como comentario final de este análisis del parámetro w vale la pena hacer la aclaración del por qué podemos tomar varios valores. Hemos dicho que w es una constante para describir el universo, y hemos procedido a dar cuatro posibles valores, cada uno de ellos con utilidad.

Podemos tomar estos valores ya que cada uno representa un universo donde la densidad de energía dominante es proporcionada por la fuente que corresponde a uno de estos w .

Es decir, al momento de estudiar la evolución del universo, es útil hacerlo por épocas, en donde asignamos un w a cada época para aproximar el tipo de universo que teníamos en ese momento.

Es decir, este estudio nos sirve como una útil aproximación a las distintas etapas del universo, comenzando por una etapa de radiación cuando en el universo temprano la densidad de energía era tan alta que gran parte de las partículas eran relativistas. Hasta el futuro enfriamiento y dilución de las densidades de energía de materia y radiación, cuando estos elementos serán despreciables y solo haya aportación de la energía del vacío que mantiene densidad constante.

3.2. Métrica de de Sitter

Como hemos visto, a partir de la métrica (3.1) es posible elegir distintos valores para los parámetros k , Λ , a , ρ y p que dan lugar a distintas soluciones. No es necesario fijar cada uno de estos valores, debido a las ecuaciones que relacionan ρ , p y a .

El caso en el que profundizaremos será en la métrica de de Sitter, donde tenemos una constante cosmológica positiva ($\Lambda > 0$), constante de curvatura $k = 0$ (Universo plano en hipersuperficies con tiempo constante) y factor de escala dado por la relación

$$a = e^{\sqrt{\Gamma}t}, \quad (3.17)$$

donde $\Gamma = \Lambda/3$, lo que indicaría un universo que se expande. Con estas consideraciones llegamos al llamado *Universo de de-Sitter*, el cual presentamos en el capítulo 1 de forma independiente, pero aquí mostramos que forma parte de una familia de modelos FLRW. Entonces, la métrica (3.1) toma la forma

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\sqrt{\Gamma}t}(r^2 + r^2 d\Omega^2). \quad (3.18)$$

Vale la pena hacer una aclaración sobre la curvatura del universo. Previamente se especificó que la solución de de Sitter describe un universo con curvatura positiva, y ahora estamos obteniendo la métrica tomando un universo plano ($k = 0$). Esto es porque la k describe la curvatura del espacio, y la métrica de de Sitter es plana a tiempos constantes, pero su curvatura global es constante positiva gracias a la inclusión de la constante cosmológica $\Lambda > 0$.

Ahora bien, podemos obtener una mejor comprensión de las propiedades de esta solución usando cambios de coordenadas para estudiarla en distintos casos. Así, comencemos el estudio de de Sitter con una transformación a coordenadas estáticas [26].

Si podemos llevar esta métrica a una forma donde $g_{00}g_{11} = -1$, podremos usar herramientas similares a las ya empleadas para el análisis de Schwarzschild.

3.2.1. Coordenadas estáticas

Buscamos una transformación de coordenadas que parta de (3.18) y lo lleve a una métrica estática, de tipo

$$ds^2 = -f dT^2 + f^{-1} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2. \quad (3.19)$$

Siguiendo las leyes de transformación para tensores que se presentaron en el capítulo pasado, la conservación del elemento de ángulo solido nos lleva a la relación, $ar = \rho$ y

$$f = 1 - r^2\dot{a}^2, \quad (3.20)$$

lo que nos lleva, al considerar que a toma la forma de (3.17), a que $f = 1 - \Gamma a^2 r^2$, es decir,

$$f = 1 - \Gamma\rho^2, \quad (3.21)$$

y el elemento de línea correspondiente,

$$ds^2 = -(1 - \Gamma\rho^2)dT^2 + \frac{d\rho^2}{1 - \Gamma\rho^2} + \rho^2 d\Omega^2. \quad (3.22)$$

Esta es la métrica de de Sitter en coordenadas estáticas [27], y podemos notar similitudes entre esta y la métrica de Schwarzschild. Como mencionamos al estudiar Schwarzschild, cuando tenemos un cociente en la métrica, existe la posibilidad de una singularidad. En este caso, hay una divergencia en $\rho = \Gamma^{-1/2}$, por lo que hay una singularidad que no teníamos en la forma original de la métrica.

Al igual que en el caso de Schwarzschild, esta singularidad coordenada representará un horizonte de eventos, por lo que podemos escribir $\Gamma = 1/r_{dS}^2$, donde r_{dS} es el radio de de Sitter, la región exterior, donde $r > r_{dS}$, está desconectada causalmente del interior.

A diferencia del caso de Schwarzschild, esta singularidad depende del observador, en el sentido de que cada observador tendrá su propio horizonte.

Además de esto, nos muestra que estas coordenadas no describen la geometría completa de de Sitter, pues no son apropiadas para explorar la región con $r > r_{dS}$.

Y finalmente, estas coordenadas nos son útiles para hacer transformaciones análogas a las de Schwarzschild. Es solo natural preguntarnos cuál será la forma de obtener unas coordenadas que describan la geometría completa, es decir, coordenadas tipo Kruskal en esta métrica.

3.3. Extendiendo el espacio

Hacemos un procedimiento análogo al capítulo anterior, partimos del elemento de línea escrito en coordenadas estáticas (3.22) y tomamos trayectorias radiales nulas, es

decir, trabajamos sobre la sección

$$ds^2 = -(1 - \Gamma\rho^2)dT^2 + (1 - \Gamma\rho^2)^{-1}d\rho^2, \quad (3.23)$$

y lo escribimos de forma conforme,

$$ds^2 = -(1 - \Gamma\rho^2)[-dT^2 + d\rho^{*2}], \quad (3.24)$$

donde $d\rho^*$ debe cumplir la ecuación

$$d\rho^* = \frac{d\rho}{1 - \Gamma\rho^2}. \quad (3.25)$$

Ahora, integramos para obtener ρ^* ,

$$\rho^* = \frac{1}{\Gamma^{1/2}} \operatorname{arctanh}(\Gamma^{1/2}\rho), \quad (3.26)$$

también podemos expresarlo en términos de un logaritmo, obteniendo la relación

$$\rho^* = \frac{1}{2\Gamma^{1/2}} \log \left(\frac{1 + \Gamma^{1/2}\rho}{1 - \Gamma^{1/2}\rho} \right), \quad (3.27)$$

que resulta útil en ciertos cálculos, para simplificar la escritura.

Con un poco de manipulación algebraica, (3.26) nos lleva a la siguiente expresión para el factor g_{00} ,

$$1 - \Gamma\rho^2 = \operatorname{sech}^2(\Gamma^{1/2}\rho^*), \quad (3.28)$$

lo que nos permite escribir (3.24) como

$$ds^2 = \operatorname{sech}^2(\Gamma^{1/2}\rho^*) (-dT^2 + d\rho^{*2}). \quad (3.29)$$

Aplicamos una transformación a coordenadas nulas

$$u = T - \rho^*, \quad (3.30)$$

$$v = T + \rho^*, \quad (3.31)$$

lo que nos da el elemento de línea

$$ds^2 = -\operatorname{sech}^2\left(\frac{\Gamma^{1/2}(v-u)}{2}\right) dudv, \quad (3.32)$$

y transformamos una vez más,

$$U = e^{\Gamma^{1/2}u}, \quad (3.33)$$

$$V = e^{-\Gamma^{1/2}v}. \quad (3.34)$$

Estas coordenadas son las coordenadas de Kruskal-Szekeres para la métrica de de Sitter. Para mantener la diagonalidad de la métrica, hagamos una rotación más, con la transformación

$$X = \frac{1}{2}(U + V), \quad (3.35)$$

$$\tau = \frac{1}{2}(U - V), \quad (3.36)$$

donde sustituyendo las coordenadas anteriores, llegamos a que

$$X = e^{-\Gamma^{1/2}\rho^*} \cosh(\Gamma^{1/2}T), \quad (3.37)$$

$$\tau = e^{-\Gamma^{1/2}\rho^*} \sinh(\Gamma^{1/2}T), \quad (3.38)$$

donde podemos reducir fácilmente con (3.27), obteniendo

$$X = \sqrt{\frac{1 - \Gamma^{1/2}\rho}{1 + \Gamma^{1/2}\rho}} \cosh(\Gamma^{1/2}T), \quad (3.39)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{1 - \Gamma^{1/2}\rho}{1 + \Gamma^{1/2}\rho}} \sinh(\Gamma^{1/2}T). \quad (3.40)$$

Entonces la métrica en coordenadas de Kruskal-Szekeres, recuperando las coordenadas angulares, es

$$ds^2 = \frac{1}{\Gamma} \left(1 + \Gamma^{1/2}\rho\right)^2 (-d\tau^2 + dX^2) + \rho^2 d\Omega. \quad (3.41)$$

Con estas coordenadas podemos hacer el diagrama de Kruskal-Szekeres para la

métrica de de Sitter, tomando en cuenta las relaciones

$$X^2 - \tau^2 = \frac{1 - \Gamma^{1/2}\rho}{1 + \Gamma^{1/2}\rho}, \quad (3.42)$$

$$\frac{\tau}{X} = \tanh(\Gamma^{1/2}T), \quad (3.43)$$

que nos indican que cuando T es constante, tendremos líneas rectas, y cuando tenemos ρ constante, tendremos hipérbolas. Análogo al caso de Schwarzschild.

De la misma manera, tendremos un desglose de regiones, en particular, podemos catalogarlo con los siguientes signos:

$$(I) \begin{cases} X = e^{\Gamma^{1/2}\rho^*} \cosh(\Gamma^{1/2}T), \\ \tau = e^{\Gamma^{1/2}\rho^*} \sinh(\Gamma^{1/2}T), \end{cases} \quad (3.44)$$

$$(II) \begin{cases} X = e^{\Gamma^{1/2}\rho^*} \sinh(\Gamma^{1/2}T), \\ \tau = e^{\Gamma^{1/2}\rho^*} \cosh(\Gamma^{1/2}T), \end{cases} \quad (3.45)$$

$$(III) \begin{cases} X = -e^{\Gamma^{1/2}\rho^*} \cosh(\Gamma^{1/2}T), \\ \tau = -e^{\Gamma^{1/2}\rho^*} \sinh(\Gamma^{1/2}T), \end{cases} \quad (3.46)$$

$$(IV) \begin{cases} X = -e^{\Gamma^{1/2}\rho^*} \sinh(\Gamma^{1/2}T), \\ \tau = -e^{\Gamma^{1/2}\rho^*} \cosh(\Gamma^{1/2}T), \end{cases} \quad (3.47)$$

al graficar todas las posibilidades en un mismo diagrama, obtenemos el diagrama de Kruskal [28].

Este diagrama posee gran similitud con el diagrama de Kruskal para la métrica de Schwarzschild. Las regiones con r constante se representan con hipérbolas con asíntota $X = \pm\tau$. Y las regiones con t constante son líneas rectas que pasan por el origen. Esto es análogo al caso de Schwarzschild.

Además, también tenemos cuatro regiones en este caso, delimitadas por las hipérbolas $X^2 - \tau^2 = \pm 1$. Una de las diferencias entre ambos diagramas es que para de Sitter, la región que relacionamos con nuestro universo se encuentra en la región $0 < r < r_{ds}$. Esta es la región I .

Analicemos el camino de un rayo de luz en la región I . Este rayo puede viajar hacia

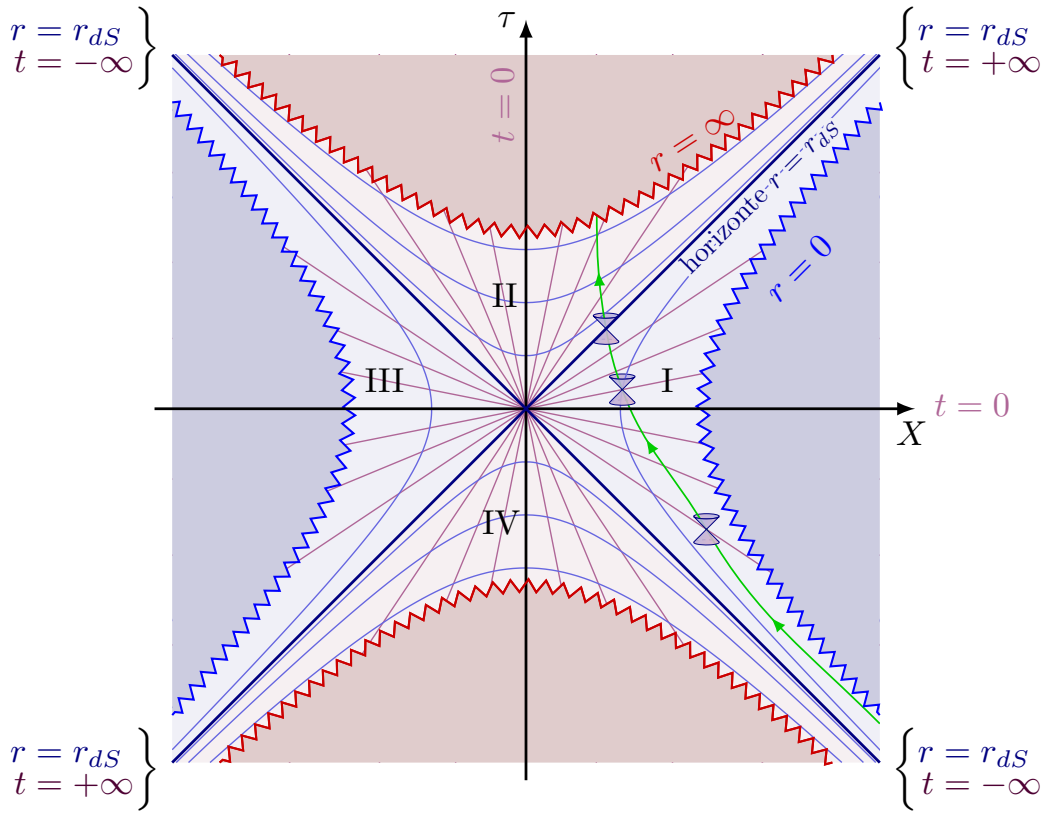


Figura 3.1: Diagrama de Kruskal para la métrica de de Sitter.

la $r = 0$ o $r = r_{dS}$, dependiendo de la dirección a la que vaya. Si el rayo viaja en dirección a $r = 0$, este puede llegar hasta esta hipérbola, la cual no representa una singularidad, por lo que el rayo de luz no tiene por qué detenerse ahí. Más bien, se verá reflejado en la hipérbola y comenzará su camino a infinito (rumbo a $r = r_{dS}$).

Si un rayo de luz cruza la región descrita por $r = r_{dS}$, este entra a la región *II* del diagrama, y continuará su recorrido hasta alcanzar la hipérbola correspondiente a $r = \infty$.

La región *III* es análoga a la región *I*. Una región del universo idéntica a la nuestra, pero desconectada causalmente de nosotros.

Y la región *IV* conectada tanto con la región *I* como con la región *III*, pero solo es capaz de mandar información a estas, pues siempre se encontrará en los conos de luz pasados de una partícula en estas regiones.

3.3.1. Diagrama conforme

Al igual que al analizar Schwarzschild, podemos obtener un diagrama conforme. Es decir, podemos obtener una representación visual de la causalidad de toda la variedad, en una gráfica finita. Para esto debemos hacer un cambio de coordenadas más.

Es útil regresar a la métrica escrita en las coordenadas nulas U y V , y hacer una transformación que nos restrinja el dominio. Debemos partir de estas coordenadas pues son nulas, y como hemos indicado, el objetivo de este diagrama será preservar los conos de luz.

La transformación,

$$U' = \arctan(U/\Gamma), \quad (3.48)$$

$$V' = \arctan(V/\Gamma), \quad (3.49)$$

restringe las variables a los rangos

$$-\pi/2 < U' < \pi/2, \quad (3.50)$$

$$-\pi/2 < V' < \pi/2, \quad (3.51)$$

y nos permite obtener la Figura 3.2.

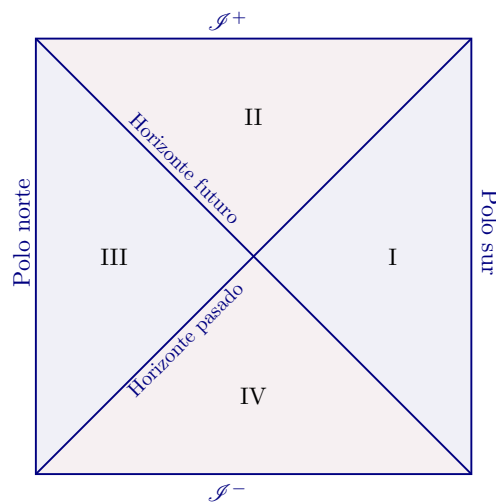


Figura 3.2: Diagrama de Penrose para de Sitter

Este diagrama contiene toda la información de causalidad de la métrica de de Sitter, a costa de tener las distancias distorsionadas. Recordemos que trabajamos con la métrica reducida, no hemos considerado ninguna coordenada angular. Por ello, cada punto de este diagrama representa realmente la superficie de una esfera, a excepción de los puntos que están en los extremos laterales, ya que estos corresponden al polo norte y polo sur respectivamente.

Las superficies \mathcal{I}^+ y \mathcal{I}^- representan el futuro y pasado de las trayectorias nulas respectivamente.

Algo interesante y que distingue esta solución de la de Minkowski es que ningún observador puede acceder a toda la variedad. Esto se debe a que nunca un observador podrá tener toda la variedad en su cono de luz pasado.

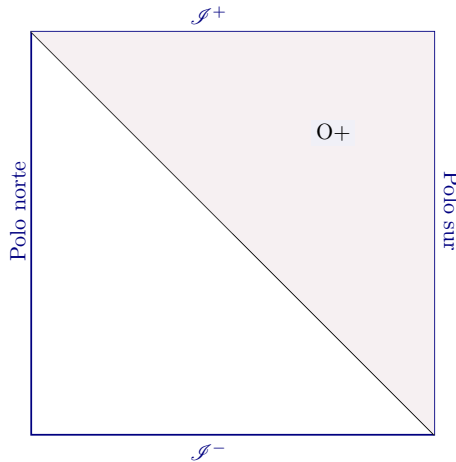


Figura 3.3: Diagrama de Penrose para la métrica de Sitter, se representa con $O+$ el futuro causal de un observador clásico en el polo sur.

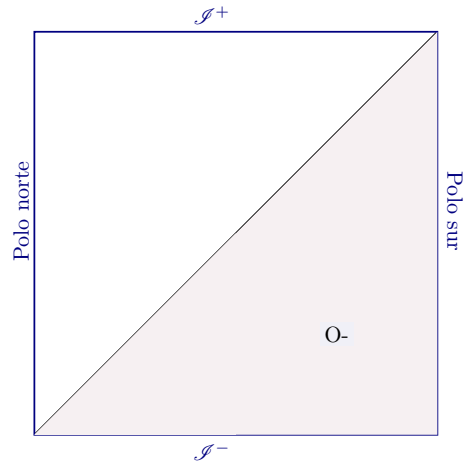


Figura 3.4: Diagrama de Penrose para la métrica de Sitter, se representa con $O-$ el pasado causal de un observador clásico en el polo sur.

Esto representa una especie de horizonte de evento. Tomemos por ejemplo, un observador en el polo sur. En la Figura 3.3 se muestra la región del espacio-tiempo que está dentro del futuro causal de un observador en el polo sur. En la Figura 3.4 se muestra lo propio para el pasado causal.

Estas regiones denotadas por $O+$ y $O-$ no abarcan todo el espacio-tiempo de la métrica, por lo que no todo el universo es accesible para un único observador. La intersección de estas dos regiones es llamada el diamante causal.

Solo esta región del diamante causal es completamente accesible para un observador

en el polo sur, en el sentido que podría mantener una comunicación con una partícula en esta región. En la diferencia simétrica de dos regiones, vemos una conexión causal solo a futuro ($O+$) o al pasado ($O-$), por lo que un observador en el polo sur solo podría mandar o recibir información de un detector en estas regiones, mas no ambas cosas.

3.4. Anti de Sitter (AdS)

Podemos extender la discusión de cosmología a la métrica de anti de Sitter. Al igual que la métrica de de Sitter, podemos comenzar con una variedad de cinco dimensiones, en este caso con la métrica[29],

$$ds^2 = -du^2 - dv^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (3.52)$$

donde sumergimos un hiperboloide dado por

$$-u^2 - v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -\Gamma^2, \quad (3.53)$$

donde Γ es una constante que determina la curvatura de esta hipersuperficie.

Vemos cierta diferencia respecto a la métrica de de Sitter en los signos, ya que aquí hay más términos negativos. Si ahora tomamos la transformación de coordenadas dada por

$$\begin{aligned} u &= \Gamma \operatorname{sen}(t') \operatorname{cosh}(\rho), \\ v &= \Gamma \operatorname{cos}(t') \operatorname{cosh}(\rho), \\ x &= \Gamma \operatorname{senh}(\rho) \operatorname{cos}\theta, \\ y &= \Gamma \operatorname{senh}(\rho) \operatorname{sen}\theta \operatorname{cos}\phi, \\ z &= \Gamma \operatorname{senh}(\rho) \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \end{aligned} \quad (3.54)$$

que nos deja con la métrica en la forma

$$ds^2 = \alpha^2 (-\operatorname{cosh}^2 \rho dt'^2 + d\rho^2 + \operatorname{senh}^2 \rho d\Omega). \quad (3.55)$$

[Podemos llevar esta expresión a una forma más familiar mediante la transformación,

$$d\rho = \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}}, \quad (3.56)$$

donde $r = \Gamma \operatorname{senh}(\rho)$. Y redefiniendo la coordenada temporal de forma similar como $t = \Gamma t'$, llegamos al siguiente elemento de línea,

$$ds^2 = -(1+r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2. \quad (3.57)$$

Que es la métrica de anti de Sitter en su forma estática.

Las coordenadas (3.55) tienen una peculiaridad, y es que de las transformaciones (3.54) vemos que t' y $t' + 2\pi$ representan la misma región del hiperboloide.

Podemos obtener el diagrama conforme para estas coordenadas con la transformación,

$$\operatorname{cosh}(\rho) = \frac{1}{\operatorname{cosh}\chi}, \quad (3.58)$$

que nos lleva a

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\operatorname{cosh}^2\chi} d\bar{s}^2, \quad (3.59)$$

donde $d\bar{s}^2$ representa la métrica del universo estático de Einstein, es decir,

$$d\bar{s}^2 = -dt'^2 + d\chi^2 + \operatorname{sen}^2\chi d\Omega^2. \quad (3.60)$$

Estas coordenadas tienen los siguientes rangos,

$$-\infty < t' < \infty, \quad (3.61)$$

$$0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3.62)$$

lo que nos lleva al diagrama de Penrose que se muestra en la Figura 3.5.

Esta métrica no es utilizada para describir la evolución del universo. Sin embargo, sirve como fundamento para otras áreas de la física teórica, tales como la holografía o la teoría de Maldacena.

La teoría de Maldacena es la llamada, *correspondencia AdS/CFT*, donde AdS se refiere precisamente a anti de Sitter. CFT hace referencia, por sus siglas en inglés, a la teoría conforme de campos. [30]

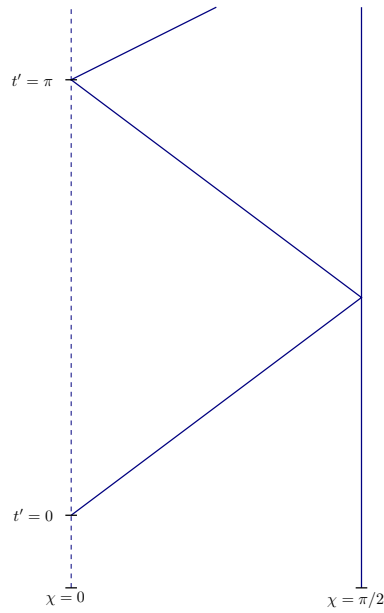


Figura 3.5: Diagrama de Penrose para el espacio-tiempo anti de Sitter

Esta teoría es actualmente un campo ampliamente estudiado, con interesantes aplicaciones. Dentro de los resultados de interés para el área en la que estamos, parece evitar el problema de la pérdida de información por agujeros negros [31].

Capítulo 4

Transformación general

4.1. Introducción

Hasta el momento hemos visto la importancia de los sistemas de coordenadas en Relatividad General, y la utilidad de la transformación de coordenadas para el análisis de las soluciones a las Ecuaciones de Einstein.

En el presente capítulo se desarrollará un método generalizado para la transformación de coordenadas que cumplen con ciertas propiedades de simetría.

Trabajaremos con métricas que puedan ser expresadas de la forma

$$g_{\mu\nu} = ds_{(1)}^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (4.1)$$

donde $f = f(r)$ y $d\Omega^2 = d\theta^2 + r^2d\phi^2$. Esto es, métricas que cumplen que $g_{00}g_{11} = -1$ [32] y que presentan simetría esférica. Estas características son compartidas por una amplia clase de soluciones exactas que pueden escribirse de forma estática [33].

4.1.1. Transformación general

Como hemos expresado, trabajaremos para obtener transformaciones de coordenadas que parten de una métrica escrita de la forma (4.1) y exploraremos las condiciones bajo las cuales podemos expresarla en una forma tipo FLRW con factores más generales,

$$ds_{(2)}^2 = -N^2(T, \rho)dT^2 + b^2(T, \rho) \left[g^2(\rho)d\rho^2 + \rho^2d\Omega^2 \right]. \quad (4.2)$$

Usamos la relación para transformar el tensor $g_{\mu\nu}$,

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} g_{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

que al analizar los componentes radial y temporal nos da las siguientes ecuaciones para el tensor $\gamma_{\alpha\beta}$,

$$\gamma_{00} = -N^2 = -f \left(\frac{\partial t}{\partial T} \right)^2 + f^{-1} \left(\frac{\partial r}{\partial T} \right)^2, \quad (4.4)$$

$$\gamma_{11} = b^2 g^2 = -f \left(\frac{\partial t}{\partial \rho} \right)^2 + f^{-1} \left(\frac{\partial r}{\partial \rho} \right)^2, \quad (4.5)$$

$$\gamma_{01} = 0 = -f \left(\frac{\partial t}{\partial T} \right) \left(\frac{\partial t}{\partial \rho} \right) + f^{-1} \left(\frac{\partial r}{\partial \rho} \right) \left(\frac{\partial r}{\partial T} \right). \quad (4.6)$$

Se ha omitido el análisis de la sección angular, debido a que transformamos de las coordenadas $(t, r, \theta, \phi) \rightarrow (T, \rho, \theta, \phi)$, es decir, la sección angular no se modifica, de forma que obtenemos directamente la relación $r = b\rho$.

Ahora, utilizando la notación $\dot{x} = \partial x / \partial T$, $x' = \partial x / \partial \rho$ y sustituyendo r , se obtiene

$$\dot{t}^2 = f^{-2}(N^2 f + \dot{b}^2 \rho^2), \quad (4.7)$$

$$t'^2 = f^{-2}[(b + b'\rho)^2 - fb^2 g^2], \quad (4.8)$$

$$t\dot{t}' f^2 = (\dot{b}\rho)(b + b'\rho). \quad (4.9)$$

Sustituyendo (4.7) y (4.8) en (4.9),

$$f = \frac{(b + b'\rho)^2}{b^2 g^2} - \frac{\dot{b}^2 \rho^2}{N^2}, \quad (4.10)$$

resulta útil derivar esta expresión, lo que nos da

$$\dot{f} = \frac{2\rho}{N^3 b^3 g^2} \left[N^3 (b + b'\rho)(\dot{b}'b - \dot{b}b') - N\dot{b}\dot{b}b^3 g^2 \rho + N\dot{b}^2 b^3 g^2 \rho \right], \quad (4.11)$$

y

$$f' = \frac{2(b'\rho + b)}{b^3 g^3} \left[g(b''b\rho + b'b - b'^2 \rho) - bg'(b + b'\rho) \right] - \frac{2\dot{b}\rho}{N^3} (N\dot{b}'\rho + N\dot{b} - N'\dot{b}\rho). \quad (4.12)$$

Ahora, regresamos a las ecuaciones (4.7) y (4.8), donde sustituimos (4.10), lo que

da

$$\dot{t} = \frac{N(b + b'\rho)}{fbg}, \quad (4.13)$$

y,

$$t' = \frac{\dot{b}bg\rho}{Nf}. \quad (4.14)$$

Después, obtenemos las parciales mixtas de t ,

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \rho \partial T} = \frac{N'(b + b'\rho) + N(2b' + \rho b'')}{fbg} - \frac{N(b + b'\rho)(fbg' + f'bg + fb'g)}{f^2 b^2 g^2}, \quad (4.15)$$

y,

$$\frac{\partial^2 t}{\partial T \partial \rho} = \frac{g\rho((\ddot{b}\dot{b} + \dot{b}^2)f - f\dot{b}\dot{b})}{Nf^2} - \frac{\dot{N}\dot{b}bg\rho}{N^2 f}. \quad (4.16)$$

Estas parciales mixtas deben ser iguales, por lo que las comparamos,

$$\begin{aligned} \frac{N'(b + b'\rho) + N(2b' + \rho b'')}{fbg} - \frac{N(b + b'\rho)(fbg' + f'bg + fb'g)}{f^2 b^2 g^2} = \\ \frac{g\rho((\ddot{b}\dot{b} + \dot{b}^2)f - f\dot{b}\dot{b})}{Nf^2} - \frac{\dot{N}\dot{b}bg\rho}{N^2 f}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Factorizando f , \dot{f} y f' para facilitar su sustitución, obtenemos,

$$\begin{aligned} f \left[N'N^2bg(b + b'\rho) + N^3bg(2b' + b''\rho) - N^3b'bg - N^3b^2g' - N^3b'^2g\rho - N^3b'bg'\rho \right. \\ \left. - Nb^2g^3\rho(\ddot{b}\dot{b} + \dot{b}^2) + \dot{N}\dot{b}b^3g^3\rho \right] + f[N\dot{b}b^3g^3\rho] - f'[N^3(b + b'\rho)bg] = 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

y usando las ecuaciones ((4.10))-((4.12)) sustituimos las f . Luego simplificamos y resolvemos para g' [34],

$$\begin{aligned}
g' = & \left\{ \frac{-N(b+b'\rho)}{bg^2} \left[N^2(b+b'\rho)^2 + (\dot{b}bg\rho)^2 \right] \right\}^{-1} g \\
& \left\{ \frac{(b+b'\rho)^2}{b^2g^2} \left[N^2b[N'(b+b'\rho) - Nb''\rho] - N^3b'(b-b'\rho) - N\ddot{b}b^3g^2\rho + \dot{N}\dot{b}b^3g^2\rho \right] \right. \\
& - \frac{\dot{b}^2\rho^2}{N^2} \left[N^2b[N'(b+b'\rho)] + N^3b''b\rho + 2N^3b'(2b+b'\rho) + Nb^2g^2\rho(\ddot{b}b - \dot{b}^2) - \dot{N}\dot{b}b^3g^2\rho \right] \\
& \left. + 4N\dot{b}\dot{b}b\rho^2(b+b'\rho) - 2N'\dot{b}b'b\rho^2(b+b'\rho) + N\dot{b}^2b^2\rho \right\}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

En este punto, tenemos una solución muy compleja, para resolverla podemos tomar ciertos límites o restricciones, lo que haremos el resto del capítulo.

Recordemos que este desarrollo es para llevar coordenadas con simetría esférica y la característica $g_{00}g_{11} = -1$ a una forma general

$$ds^2 = -NdT^2 + b^2(g^2d\rho^2 + \rho^2d\Omega^2), \tag{4.20}$$

donde $N = N(T, \rho)$, $b = b(T, \rho)$ y $g = g(\rho)$. Por lo que podemos intuir límites en los cuales se reduzca a casos conocidos.

4.2. FLRW

Uno de estos casos es FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker). En (4.20) podemos visualizar que con $N = 1$ y $b = b(T)$ tenemos el ansatz para coordenadas comóviles en un universo que se expande en el tiempo. Sustituyendo estos valores en (4.19) tenemos una expresión simplificada,

$$g' = g^3\rho(\ddot{b}b - \dot{b}^2), \tag{4.21}$$

donde es posible separar las variables dependientes de T y las que dependen de ρ , obteniendo

$$\frac{g'}{g^3\rho} = \ddot{b}b - \dot{b}^2 = \kappa, \tag{4.22}$$

con κ una constante arbitraria. Así, integrando

$$\frac{1}{g^2} = A - \kappa\rho^2, \quad (4.23)$$

donde A es una constante de integración. Podemos reescribir esta relación como,

$$g^2 = \frac{1}{A - \kappa\rho^2}, \quad (4.24)$$

donde podemos notar que κ puede restringirse a los valores $-1, 0, 1$ reescalando $b(T)$ de forma adecuada. Además, considerando el universo localmente plano y homogéneo en T constante, podemos fijar $A = 1$. Con esto obtenemos el factor clásico de FLRW.

Además, de la ecuación (4.22) también podemos obtener que,

$$\frac{\ddot{b}}{b} = \frac{\dot{b}^2 + \kappa}{b^2}. \quad (4.25)$$

Integrando esta ecuación, mediante el cambio de variable $z(\tau) = \dot{b}^2 + \kappa$, que implica $\dot{z} = 2\dot{b}\ddot{b}$, entonces, de (4.25) se transforma en,

$$\frac{\dot{z}}{z} = 2\frac{\dot{b}}{b}, \quad (4.26)$$

que tiene de solución $z = \Gamma b^2$, donde Γ es otra constante de integración.

Con esto, podemos separar la expresión de (4.25) en las relaciones

$$\frac{\dot{b}^2 + \kappa}{b^2} = \Gamma, \quad (4.27)$$

y

$$\frac{\ddot{b}}{b} = \Gamma. \quad (4.28)$$

Estas relaciones son precisamente, las dos ecuaciones de Friedmann, donde identificamos la constante Γ con la constante cosmológica, más específicamente, $\Lambda = 3\Gamma$, donde esta es la única fuente del tensor energía-momento.

Además, de la relación (4.24) y sustituyendo $r = b\rho$ y la relación $\dot{b}^2 = \Gamma b^2 - \kappa$ en (4.10) $f = 1 - \Gamma r^2$.

Con esta transformación obtenemos la métrica

$$ds^2 = -dT^2 + b^2(T) \left[\frac{1}{1 - \kappa\rho} d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2 \right], \quad (4.29)$$

que es la métrica de FLRW.

Dependiendo del valor de Γ se pueden tomar distintos modelos de FLRW, la siguiente tabla muestra todas las combinaciones de valores para Γ y k que se permiten, de acuerdo a la ecuación (4.27).

Γ	Curvatura espacial	Métrica
$\Gamma = 0$	$k = 0$	$ds^2 = -d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2$
$\Gamma = 0$	$k = -1$	$ds^2 = -d\tau^2 + \tau^2 \left(\frac{d\rho^2}{1+\rho^2} + \rho^2 d\Omega^2 \right)$
$\Gamma > 0$	$k = 0$	$ds^2 = -d\tau^2 + e^{2\sqrt{\Gamma}T} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2)$
$\Gamma > 0$	$k = 1$	$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{\cosh^2(\sqrt{\Gamma}T)}{\Gamma} \left(\frac{d\rho^2}{1-\rho^2} + \rho^2 d\Omega^2 \right)$
$\Gamma > 0$	$k = -1$	$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{\sinh^2(\sqrt{\Gamma}T)}{\Gamma} \left(\frac{d\rho^2}{1+\rho^2} + \rho^2 d\Omega^2 \right)$
$\Gamma < 0$	$k = -1$	$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{\text{sen}^2(\sqrt{ \Gamma }T)}{ \Gamma } \left(\frac{d\rho^2}{1+\rho^2} + \rho^2 d\Omega^2 \right)$

Tabla 4.1: Modelos FLRW que admiten coordenadas estáticas

Podemos identificar estos modelos [35]. Cuando $\Gamma = k = 0$ tenemos un universo plano sin constante cosmológica, esto corresponde a la métrica de Minkowski mencionada anteriormente.

Si mantenemos $\Gamma = 0$ pero añadimos curvatura, con $k = -1$ tendremos el universo de Milne. Esta solución corresponde a una sección de la solución de Minkowski, puede interpretarse como el interior del cono de luz futuro de un evento en Minkowski.

Si tenemos $\Gamma > 0$, podemos aceptar los tres valores para k . Si $k = 0$ tenemos un universo con constante positiva y espacio plano, lo que corresponde a la solución de de Sitter. Si además existe curvatura espacial ($k = \pm 1$), tenemos un modelo de Lanczos.

Y finalmente, tenemos la opción de $\Gamma < 0$, que solo es consistente con $\kappa = -1$. Este caso es el de anti de Sitter (AdS).

4.3. Coordenadas estáticas

Podemos estudiar diversos casos importantes, tales como Minkowski o Schwarzschild, tomando un par de suposiciones en la ecuación (4.19). Consideremos $\dot{N} = \dot{b} = 0$, es decir, todos los factores dependen solo de ρ . Esto nos lleva a,

$$\left[\frac{-N^3}{g} (b + b'\rho)^3 \right] g' = \frac{N^2 (b + b'\rho)^2}{b} [b[N'(b + b'\rho) - Nb''\rho] - Nb'(b - b'\rho)], \quad (4.30)$$

reordenamos términos,

$$b' + b''\rho - \frac{b'^2}{b}\rho = \left(\frac{N'}{N} + \frac{g'}{g} \right) (b + b'\rho), \quad (4.31)$$

donde podemos utilizar que

$$\frac{d(b + b'\rho)}{d\rho} = 2b' + b''\rho,$$

para manipular la ecuación,

$$\frac{d(b + b'\rho)}{d\rho} - (b + b'\rho) \frac{b'}{b} = \left(\frac{N'}{N} + \frac{g'}{g} \right) (b + b'\rho) = 0,$$

entonces tenemos que,

$$\frac{d(b + b'\rho)}{(b + b'\rho) d\rho} = \left(\frac{N'}{N} + \frac{g'}{g} \right) + \frac{b'}{b} = 0. \quad (4.32)$$

Integramos para obtener,

$$\ln(b + b'\rho) = \ln N + \ln g + \ln b + C, \quad (4.33)$$

con C constante. Y finalmente,

$$b + b'\rho = 2\alpha Nbg, \quad (\text{AUX})$$

donde α es una constante de integración. De hecho, usando (AUX) y (4.10), podemos

observar que f y N están relacionados por la ecuación

$$f = 4\alpha^2 N^2. \quad (4.34)$$

Ahora, a partir de la ecuación (AUX) podemos considerar restricciones para analizar casos de métricas estáticas con simetría esférica.

4.3.1. Minkowsky

El caso más trivial, que sirve como revisión de consistencia para las relaciones obtenidas, es el caso del espacio-tiempo plano. Imponemos las condiciones de $N = 1$, lo que de (4.34), indica que $f = 4\alpha^2$, esto es, el caso de Minkowski reescalado. Además, consideramos que $g = \beta$ una constante, entonces, de (AUX) obtenemos,

$$b + b'\rho = 2\alpha\beta b, \quad (4.35)$$

para resolverla primero dividimos entre b , y acomodando los términos,

$$\frac{b'}{b} = \frac{2\alpha\beta - 1}{\rho}, \quad (4.36)$$

introducimos la constante $A = 2\alpha\beta - 1$ para simplificar la escritura, e integrando obtenemos la relación,

$$b = B\rho^A, \quad (4.37)$$

donde B es otra constante de integración. Esta forma para el parámetro b nos permite obtener distintas coordenadas de la métrica de Minkowsky. Si queremos en caso trivial, podemos tomar $A = 0$, lo que dejará b constante. Podemos sustituir este resultado en la ecuación (4.10) para obtener una relación entre f y g ,

$$f = \frac{(1 + A)^2}{\alpha^2}. \quad (4.38)$$

Donde ya escribimos g como constante, para ilustrar que ya se obtuvo una f constante. Para trabajar con Minkowski sin complicaciones de reescalamientos, podemos considerar $f = 1$, lo que nos relaciones $\alpha = 1 + A$. En este punto, ya tenemos la transformación de

$$ds_{(1)}^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.39)$$

a

$$ds_2^2 = -dT^2 + (B\rho^A)(1+A)^2 d\rho^2 + (B\rho^A)\rho^2 d\Omega^2, \quad (4.40)$$

donde ya determinamos que son nuevas coordenadas para la métrica de Minkowski, solo resta la elección de A y B para obtener una representación útil. En particular, podemos analizar la restricción

$$b^2 = \frac{\beta^2}{r}, \quad (4.41)$$

y considerando (4.37) obtenemos

$$\frac{\beta^2}{r} = B^2 \rho^{2A}, \quad (4.42)$$

pero

$$b^2 \rho^2 = \left(\frac{\beta^2}{r} \right) \rho^2 = r^2, \quad (4.43)$$

así que, $r = \beta^{2/3} \rho^{2/3}$, que al sustituirse en (4.42) da la fórmula

$$B^2 \rho^{2(A+\frac{1}{2})} = \beta^{4/3}, \quad (4.44)$$

donde B y β son constantes, de forma que no debe haber dependencia de ρ , entonces $A = -1/3$ y $B = \beta^{2/3}$.

Entonces obtenemos que $b = B\rho^{-1/3}$, y $\alpha = 1 - 1/3 = 2/3$. Finalmente, elegimos $\beta = 3/2$, que quedaba como parámetro libre, para obtener la representación un poco más estética,

$$ds_2^2 = -dT^2 + \frac{1}{r} d\rho^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (4.45)$$

podemos observar que es una representación de Minkowski con coordenadas tipo Le-maître.

4.3.2. Coordenadas cercanas al horizonte

Podemos tomar un caso más interesante si consideramos que $N = \rho$, manteniendo $bg = 1$. Entonces (AUX) nos lleva a $b = \alpha\rho + \beta\rho^{-1}$. Y como $r = b\rho$ tenemos que,

$$r = \alpha\rho^2 + \beta. \quad (4.46)$$

Entonces, de (4.34),

$$f = 4\alpha(r - \beta). \quad (4.47)$$

Con las restricciones seleccionadas, estamos tomando el caso de un Rindler (1+1), puesto que tenemos la forma $ds^2 = -\rho^2 d\tau^2 + d\rho^2$ a ángulos constantes. Sin embargo, esta relación subdimensional no equivale a obtener una representación global para el espacio de Rindler, puesto que estamos haciendo uso de componentes angulares para las operaciones, además de que ya nos restringimos a una $f = f(r)$ no constante lo que claramente nos aleja de Minkowski.

Más bien, las coordenadas que obtenemos mediante esta transformación se pueden asociar a otra solución, mediante la identificación $\alpha = (8M)^{-1}$ y $\beta = 2M$.

Esto es, de (4.46),

$$\rho = 2\sqrt{r_S(r - r_S)}, \quad (4.48)$$

que es justo la aproximación realizada en (2.6), es decir, en las coordenadas de Rindler para el caso de Schwarzschild.

Ya hemos analizado esta solución, que nos describe la región cercana al horizonte de eventos, y nos muestra la no singularidad de este.

4.3.3. Coordenadas de Tortoise

Las coordenadas de Tortoise vienen de imponer que las secciones de coordenadas temporal y radial sean conforme planas, es decir, se impone que $N = bg$, entonces (4.20) con $d\Omega = 0$ se reduce a

$$ds_{(2)}^2 = N^2(-d\tau^2 + d\rho^2), \quad (4.49)$$

y (AUX),

$$dr = 2\alpha N^2 d\rho. \quad (4.50)$$

Podemos considerar distintos casos no triviales, tal como $N^2 = \rho$. Entonces la solución de (4.49) es $r = b\rho = \alpha\rho^2 + \beta$. Esto es, se obtiene la misma relación vista en

(4.46) para las coordenadas cercanas al horizonte. Sin embargo, en dicho caso impusimos las condiciones $bg = 1$ y $N^2 = \rho^2$, mientras que en este caso tenemos $b^2g^2 = N^2 = \rho$.

Así pues, de (4.34) obtenemos $f = 4\alpha^2\rho = 4\sqrt{\alpha^3(r-\beta)}$, que es distinto al que se obtuvo para el caso de coordenadas cercanas a horizonte. Podemos incluso considerar casos más interesantes, tales como $N = \rho^k$ con distintos valores para la constante k .

Sin embargo, podemos tomar una ruta más simple. Estamos trabajando en coordenadas que hemos llamado estáticas, debido a que no hay dependencia temporal en N ni en b , o lo que es lo mismo, solo dependen de ρ , lo que nos ha llevado a que $r = r(\rho)$. Asumiendo invertibilidad en una región del espacio, podemos considerar que $N = N(r)$, entonces podemos despejar de (4.34) y (4.50),

$$d\rho = 2\alpha f^{-1} dr. \quad (4.51)$$

Tomando el valor $\alpha = 1/2$, y obtendremos la coordenada de Tortoise para cualquier métrica que pueda escribirse en la forma (4.2). Para los casos de interés del presente trabajo, tenemos

Para la métrica de Schwarzschild $f = 1 - \frac{r_S}{r}$ donde r_S es el radio de Schwarzschild ($2GM$). Integrando obtenemos $\rho^* = r + 2M \ln[r/(2M) - 1]$ para la solución exterior. Esta es la coordenada de Tortoise o de Regge–Wheeler, ya desarrollada en el capítulo correspondiente a Schwarzschild.

En el caso de de Sitter, $f = 1 - \Gamma r^2$ donde $\Gamma = 1/r_{dS}^2$, el inverso del radio de de Sitter al cuadrado. Bajo integración obtenemos $\rho^* = \Gamma^{1/2} \operatorname{arctanh}(\Gamma^{1/2}r)$, que es la coordenada Tortoise para la métrica de de Sitter que se obtuvo previamente.

La importancia de las coordenadas de Tortoise es que mantienen los conos de luz invariantes. Esto lo podemos ver de (4.49), donde si tomamos trayectorias nulas tenemos $ds_2^2 = 0$, entonces,

$$\frac{d\tau}{d\rho} = \pm 1, \quad (4.52)$$

lo que mantiene los conos de luz a 45° .

El caso de Schwarzschild se muestra en la gráfica 4.1.

En la figura se aprecia cómo los conos de luz no se degeneran en coordenadas de Tortoise, lo que sí ocurría en las coordenadas de Schwarzschild. Además, ningún elemento de la métrica diverge en estas nuevas coordenadas, sin embargo, el costo de esto es mandar a $-\infty$ la superficie $r = 2GM$.

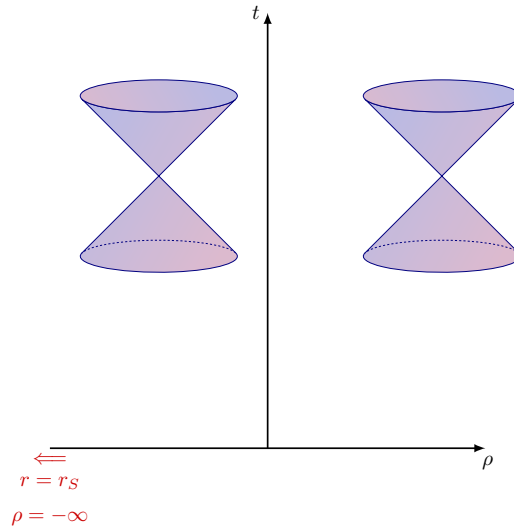


Figura 4.1: Conos de luz para la métrica de Schwarzschild con las coordenadas de Tortoise.

4.3.4. Coordenadas isotrópicas

Las coordenadas isotrópicas son aquellas que representan una métrica en la forma

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + b^2(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \quad (4.53)$$

es decir, representa explícitamente la simetría esférica, a la vez que deja las rebanadas espaciales conforme planas.

Podemos hacer la asociación $g = 1$ y de las ecuaciones (AUX) y (4.34), recordando que $r = b\rho$, podemos obtener la relación

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dr}{r\sqrt{f}}, \quad (4.54)$$

donde, de nuevo, es necesario usar la forma explícita de f para obtener la transformación de coordenadas específica.

Para el caso de Schwarzschild tenemos $f = 1 - r_S/r$, que nos lleva a

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dr}{r\sqrt{1 - r_S/r}}, \quad (4.55)$$

integrando llegamos a la solución $\ln(\beta\rho) = \text{arccosh}(\frac{2r}{r_S} - 1)$, y con algo de álgebra

obtenemos

$$\frac{(\beta\rho + 1)^2}{4\beta\rho} = \frac{r}{r_S}. \quad (4.56)$$

Podemos aquí considerar el comportamiento asintótico de las coordenadas radiales, imponiendo que $\rho \rightarrow r$ para $r > r_S$. Esta condición nos lleva a que $\beta = 4/r_S$, y despejamos r ,

$$r = \rho \left(1 + \frac{r_S}{4\rho}\right)^2, \quad (4.57)$$

que es justo la transformación para coordenadas isotrópicas de la métrica de Schwarzschild, y la métrica se escribe como

$$ds^2 = - \left(\frac{1 - \frac{r_S}{4\rho}}{1 + \frac{r_S}{4\rho}}\right)^2 dT^2 + \left(1 + \frac{r_S}{4\rho}\right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2). \quad (4.58)$$

Ahora bien, para el caso de de Sitter tenemos $f = 1 - \Gamma r^2$, entonces trabajamos con la ecuación

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dr}{r\sqrt{1 - \Gamma r^2}}, \quad (4.59)$$

cuya solución es $\ln(\beta\rho) = -\operatorname{arcsech}(\Gamma r)$, y manipulando los términos con álgebra obtenemos,

$$\frac{1 + \beta^2 \rho^2}{\beta\rho} = \frac{2}{\Gamma^{1/2} r}. \quad (4.60)$$

Consideremos el comportamiento asintótico de las coordenadas radiales, en este caso, exigimos que $\rho \rightarrow r$ cerca del origen, lo que nos lleva a que $\beta = \Gamma^{1/2}/2$. Sustituyendo esto, y despejando r llegamos a la expresión

$$r = \frac{\rho}{1 + \frac{\Gamma}{4}\rho^2}, \quad (4.61)$$

y el factor f queda en términos de ρ como

$$1 - \Gamma r^2 = \frac{(1 - \frac{\Gamma}{4}\rho^2)^2}{(1 + \frac{\Gamma}{4}\rho^2)^2}. \quad (4.62)$$

Finalmente, la métrica de de Sitter en coordenadas isotrópicas queda de la forma

$$ds^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\Gamma}{4}\rho^2\right)^2} \left[- \left(1 - \frac{\Gamma}{4}\rho^2\right)^2 dT^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2 \right]. \quad (4.63)$$

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo hemos presentado un análisis de dos soluciones de las ecuaciones de Einstein a partir de distintos cambios de coordenadas.

Partiendo de una breve introducción a los fundamentos de la Relatividad General, en el capítulo 1 se presentaron las soluciones de Schwarzschild y de de Sitter, mencionando las propiedades que son derivables directamente de la forma de la métrica con la que se presentaron.

En el capítulo 2 se estudió la métrica de Schwarzschild a partir de los cambios de coordenadas, observando la geometría global, la causalidad, y la extensión máxima que presenta esta variedad.

En el capítulo 3 se hizo un estudio análogo para la métrica de de Sitter, culminando con unos comentarios complementarios con la solución de anti de Sitter.

Y finalmente en el capítulo 4 se ha desarrollado un método consistente para obtener distintas representaciones de métricas con la forma

$$ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (5.1)$$

es decir, métrica con simetría esférica y que pueden ser escritas en coordenadas que cumplan que $g_{00}g_{11} = -1$.

A partir de este elemento de línea, conseguimos la forma

$$ds^2 = -N^2(\tau, \rho) d\tau^2 + b^2(\tau, \rho) (g^2(\rho) d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2), \quad (5.2)$$

donde N , b y g son funciones como se indica.

Aplicamos este formalismo a las dos soluciones exactas a las ecuaciones de Eins-

tein, que estudiamos previamente, y dimos los parámetros adecuados para obtener una amplia variedad de coordenadas conocidas.

Es interesante ver cómo el imponer simetrías al nivel de la transformación de la métrica, nos puede llevar a la identificación de ciertos espacios. Y más aún, nos define de manera única la geometría en la que trabajamos, tal es el caso de las coordenadas de Rindler para la métrica de Schwarzschild, donde las condiciones impuestas nos llevaron a una única solución posible, mediante el reconocimiento de los parámetros que llevaron a un caso aproximado de la solución de Schwarzschild.

Además, es interesante remarcar que es posible relajar las condiciones impuestas a las variables b y N . Esta posibilidad se exploró en el trabajo [34], donde se mostró que es posible llegar a representaciones tipo Kruskal y Lemaître siguiendo este formalismo.

Si bien la mayoría de las métricas mencionadas ya han sido analizadas en la literatura, tanto en este trabajo de tesis como en las publicaciones derivadas de él, las aportaciones son multipropósito. En primer lugar, otorgamos un enfoque didáctico en relación a una forma consistente de transformar entre distintas representaciones de un mismo espacio-tiempo. En segundo lugar, el análisis a nivel de las simetrías explícitas que aparecen con los métodos mostrados, permiten profundizar de manera más tratable aspectos que a menudo son ignorados. Un ejemplo de ello es la relación entre coordenadas de Schwarzschild y las cercanas al horizonte.

Por ejemplo, el análisis de este trabajo nos permite plantearnos qué tipo de restricciones requiere un espacio-tiempo para ser representable tipo Rindler. Por último, en este trabajo nos hemos enfocado en las soluciones de Schwarzschild y de de Sitter, sin embargo, este formalismo puede ser aplicado a otras métricas que compartan las características de tener simetría esférica, y poderse expresar de forma que $g_{00}g_{11} = -1$, tales como las soluciones de Reissner-Nordström o de anti de Sitter. Estos dos últimos aspectos se dejan como trabajo a futuro.

Apéndice A

Toda métrica bidimensional es conforme plana

Sea una métrica bidimensional arbitraria g_{ab} , para probar que es conformemente plana basta mostrar que puede ser escrita de la forma

$$g_{ab} = \Omega^2 \eta_{ab}. \quad (\text{A.1})$$

El elemento de línea que tenemos es:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = g_{00} (dx^0)^2 + 2g_{01} dx^0 dx^1 + g_{11} (dx^1)^2, \quad (\text{A.2})$$

podemos partir cambiando a las coordenadas nulas λ y ν ,

$$\lambda(x^0, x^1) = x^{0'}, \quad (\text{A.3})$$

$$\nu(x^0, x^1) = x^{1'}, \quad (\text{A.4})$$

que al ser curvas nulas satisfacen

$$g^{ab} \lambda_{,a} \lambda_{,b} = g^{ab} \nu_{,a} \nu_{,b} = 0, \quad (\text{A.5})$$

lo que directamente nos da los elementos de la diagonal de la matriz transformada:

$$\begin{aligned} g^{0'0'} &= g^{ab}\lambda_{,a}\lambda_{,b} = 0, \\ g^{1'1'} &= g^{ab}\nu_{,a}\nu_{,b} = 0. \end{aligned}$$

Entonces los elementos $g^{a'a'}$ son cero, y desarrollando,

$$\begin{aligned} g^{0'0'} &= 0 \\ &= g^{0'a'}g^{0'b'}g_{a'b'}, \\ &= g^{0'0'}g^{0'0'}g_{0'0'} + g^{0'1'}g^{0'1'}g_{1'1'} + 2g^{0'0'}g^{0'1'}g_{0'1'}, \\ &= g^{0'1'}g^{0'1'}g_{1'1'}, \end{aligned}$$

donde estamos considerando, que $g^{0'1'} \neq 0$, de forma que el determinante de la métrica es diferente de cero y por lo tanto existe su inversa. Así, solo queda que $g_{1'1'} = 0$, y con un procedimiento análogo llegamos a $g_{0'0'} = 0$.

Así pues, nuestro elemento de línea con la transformación de coordenadas es de la forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{a'b'}dx^{a'}dx^{b'}, \\ &= 2g_{0'1'}d\lambda d\nu, \end{aligned}$$

sin pérdida de generalidad, consideremos signo positivo (si es signo negativo, es análogo el desarrollo), de forma que podemos escribirlo como,

$$ds^2 = e^{2\mu}d\lambda d\nu, \tag{A.6}$$

donde simplemente $\mu = (1/2)\log(2g_{0'1'})$.

Finalmente, hacemos un último cambio, a las las nuevas coordenadas $\tau = (1/2)(\lambda + \nu)$ y $r = (1/2)(\lambda - \nu)$, así,

$$d\tau = \frac{1}{2}(d\lambda + d\nu), \tag{A.7}$$

$$dr = \frac{1}{2}(d\lambda - d\nu), \tag{A.8}$$

entonces

$$d\tau^2 - d\nu^2 = \left[\frac{1}{2}(d\lambda + d\nu)\right]^2 - \left[\frac{1}{2}(d\lambda - d\nu)\right]^2, \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{1}{4}(d\lambda^2 + 2d\lambda d\nu + d\nu^2) - \frac{1}{4}(d\lambda^2 - 2d\lambda d\nu + d\nu^2), \quad (\text{A.10})$$

$$= (d\lambda d\nu), \quad (\text{A.11})$$

por lo que

$$ds^2 = e^{2\mu}(d\tau^2 - d\nu^2), \quad (\text{A.12})$$

que es conforme plano.

Apéndice B

Cosmología tipo Agujero Negro

La métrica de Schwarzschild se utiliza para describir campos gravitacionales de fuentes que son masas con simetría esférica. Esto incluye casos tales como planetas, estrellas, agujeros negros, y asteroides con una distribución que se pueda aproximar como esférica. Para aplicarse, se consideran las geodésicas y se analizan las trayectorias de partículas de prueba, que son objetos que no modifican de forma significativa la geometría del espacio.

Sin embargo, existe una teoría que le da un carácter cosmológico a esta métrica. Esta es, la Cosmología tipo Agujero Negro (*Black Hole Cosmology*), formulada en 1972 por Raj Kumar Pathria [36], la cual plantea que el Universo es un agujero negro. Esto tiene su fundamento observacional, pues el valor del radio de Schwarzschild para un objeto con la masa de nuestro Universo es aproximado al radio de Universo Observable.

Para esto utiliza una métrica relacionada con las estudiadas en este trabajo, la métrica de Schwarzschild-de Sitter. Este viene dada por el elemento de línea,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} - \Gamma r^2 \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} - \Gamma r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (\text{B.1})$$

donde G es la constante de gravitación universal y $\Gamma = (\Lambda/3)^{1/2}$, el mismo valor que toma en la forma estática de la métrica de de Sitter.

Posterior a las ideas de Pathria, Lee Smolin propuso su idea de Selección Cosmológica Natural [37] donde plantea que con en creación de un agujero negro puede dar comienzo a un nuevo universo, emulando ideas evolutivas.

De manera similar, Carroll plantea que pueden surgir universos de fluctuaciones de

térmicas, que generen agujeros negros que son universos en si mismos[38].

Y actualmente hay trabajos de Popławski donde retoma esta idea de Universos dentro de Agujeros Negros, aunque sus trabajos se basan en la teoría de Einstein-Cartan [39].

Bibliografía

- [1] Albert Einstein. On a stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses. *Annals of Mathematics*, 40(4):922–936, 1939.
- [2] A. Einstein and N. Rosen. The particle problem in the general theory of relativity. *Phys. Rev.*, 48:73–77, Jul 1935.
- [3] J. R. Oppenheimer and H. Snyder. On continued gravitational contraction. *Phys. Rev.*, 56:455–459, Sep 1939.
- [4] Wolfgang Engelhardt. On the origin of the lorentz transformation, 2018.
- [5] Albert Einstein. Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 844–847, January 1915.
- [6] Albert Einstein. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7):769–822, 1916.
- [7] K. Schwarzschild. On the gravitational field of a mass point according to einstein's theory. *Sitzungsber.Preuss.Akad.Wiss.Berlin (Math.Phys.)*, 1999 (1916).
- [8] W. de Sitter. On Einstein's Theory of Gravitation and its Astronomical Consequences. Third Paper. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 78(1):3–28, 11 1917.
- [9] C.W. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler. *Gravitation*. Gravitation. W. H. Freeman, 1973.
- [10] Sean Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2003.

-
- [11] Richard Chace Tolman. *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Clarendon Press, Oxford,, 1934.
- [12] J.T. Giblin, D. Marolf, and R. Garvey. Spacetime embedding diagrams for spherically symmetric black holes. *General Relativity and Gravitation*, 2004.
- [13] M. D. Kruskal. Maximal extension of schwarzschild metric. *Phys. Rev.*, 119:1743–1745, Sep 1960.
- [14] G. Szekeres. On the singularities of a Riemannian manifold. *Publ. Math. Debrecen*, 7:285–301, 1960.
- [15] V. P. Frolov and I. D. Novikov, editors. *Black hole physics: Basic concepts and new developments*. Springer Dordrecht, 1998.
- [16] Roger Penrose. Asymptotic properties of fields and space-times. *Phys. Rev. Lett.*, 10:66–68, Jan 1963.
- [17] L. Susskind and J. Lindesay. *An Introduction to Black Holes, Information and the String Theory Revolution: The Holographic Universe*. G - Reference, Information and Interdisciplinary Subjects Series. World Scientific, 2005.
- [18] J A Nieto and J E Madriz Aguilar. Aspects of $(4 + 4)$ -kaluza-klein type theory. *Physica Scripta*, 94(11):115303, 8 2019.
- [19] José P.S. Lemos and Diogo L.F.G. Silva. Maximal extension of the schwarzschild metric: From painlevé–gullstrand to kruskal–szekeres. *Annals of Physics*, 430:168497, 2021.
- [20] P.S. Joshi. *Global Aspects in Gravitation and Cosmology*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1994.
- [21] R.M. Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, 2010.
- [22] R. D’Inverno. *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press, 1992.
- [23] P.J.E. Peebles. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton Series in Physics. Princeton University Press, 1993.
- [24] A. Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, 2015.

-
- [25] Barbara Ryden. *Introduction to Cosmology*. Addison Wesley, 2002.
- [26] Abhas Mitra. When can an “expanding universe” look “static” and vice versa: A comprehensive study. *International Journal of Modern Physics D*, 24(05):1550032, 2015.
- [27] Juan Nieto, Edgar León, and C. García-Quintero. Cosmological-static metric correspondence and kruskal type solutions from symmetry transformations. *Revista Mexicana de Física*, 68, 06 2022.
- [28] Johanna Friedl Beck and Akira Inomata. Kruskal-like representation of the de Sitter metric. *Journal of Mathematical Physics*, 25(10):3039–3040, 10 1984.
- [29] Fulgencio Villegas. Espacio-tiempo anti-de Sitter (ads). *Revista de Investigación de Física*, page 19–24, 2019.
- [30] Juan Maldacena. The large n limit of superconformal field theories and supergravity. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 1998.
- [31] S. W. Hawking. Information loss in black holes. *Phys. Rev. D*, 72:084013, Oct 2005.
- [32] Ted Jacobson. When is $g_{tt}g_{rr} = -1$? *Classical and Quantum Gravity*, 24(22):5717, nov 2007.
- [33] Alexey V. Toporensky and Oleg B. Zaslavskii. Regular frames for spherically symmetric black holes revisited. *Symmetry*, 14(1), 2022.
- [34] Edgar A. León and Andrés Sandoval-Rodríguez. Symmetry transformations in cosmological and black hole analytical solutions. *Symmetry*, 16(4), 2024.
- [35] P.S. Florides. The Robertson-Walker metrics expressible in static form. *Gen Relat Gravit*, 1980.
- [36] R. K. Pathria. The universe as a black hole. *Nature*, 240:298–299, 1972.
- [37] Lee Smolin. *The life of the cosmos*. Oxford University Press, 1997.
- [38] Sean M. Carroll and Jennifer Chen. Does inflation provide natural initial conditions for the universe? *Gen. Rel. Grav.*, 37:1671–1674, 2005.

- [39] Nikodem Popławski. Universe in a black hole in Einstein–Cartan gravity. *The Astrophysical Journal*, 832(2):96, nov 2016.