

Universidad Autónoma de Sinaloa

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas



Factores de forma de transición de mesones en el modelo de interacción de contacto

*Tesis presentada en cumplimiento de
los requisitos para el grado de:
Maestra en Física*

Autora:

Lic. Gabriela Natalia Gaxiola Millán

Directores:

Dr. Roger José Hernández Pinto

Dra. Laura Xiomara Gutiérrez Guerrero

Noviembre de 2024



Dirección General de Bibliotecas
Ciudad Universitaria
Av. de las Américas y Blvd. Universitarios
C. P. 80010 Culiacán, Sinaloa, México.
Tel. (667) 713 78 32 y 712 50 57
dgbuas@uas.edu.mx

UAS-Dirección General de Bibliotecas

Repositorio Institucional Buelna

Restricciones de uso

Todo el material contenido en la presente tesis está protegido por la Ley Federal de Derechos de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

Queda prohibido la reproducción parcial o total de esta tesis. El uso de imágenes, tablas, gráficas, texto y demás material que sea objeto de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente correctamente mencionando al o los autores del presente estudio empírico. Cualquier uso distinto, como el lucro, reproducción, edición o modificación sin autorización expresa de quienes gozan de la propiedad intelectual, será perseguido y sancionado por el Instituto Nacional de Derechos de Autor.

Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-No Comercial
Compartir Igual, 4.0 Internacional



*Para Ale
y Gala.*

Agradecimientos

Para quien esté leyendo esto, tengo que advertir que no seré breve ya que hay mucho que agradecer. Estos dos últimos años, más un breve período en el que terminaba la tesis, han estado cargados de experiencias en su mayoría positivas, además de aprendizajes diversos ámbitos además del académico.

En primer lugar, quisiera agradecer al CONAHCYT por su apoyo gracias a las becas de maestría, que tanto a mí, a mis compañeros de aula y a tantos estudiantes de posgrado nos han dado los medios para seguir en nuestra formación. Agradezco también a la FCFM-UAS por brindarme la oportunidad de ingresar a la maestría, así como permanecer aquí a la par de brindarme las clases que me fueron útiles para desarrollar mis conocimientos profesionales.

Quiero darle gracias a mis profesores, en primer lugar al Dr. Roger José Hernández Pinto, quien ha sido mi asesor desde la licenciatura y con quien he tenido la fortuna de seguir trabajando con él durante mi posgrado. Desde los conocimientos que he adquirido trabajando con él, la oportunidad de trabajar en artículos de investigación, hasta la oportunidad de presentar mis resultados en distintas partes del país, son a grandes rasgos algunas de las cosas por las cuales le estoy infinitamente agradecida. Sin embargo, la principal cosa que quiero agradecerle al Dr. Roger es su gran disposición a apoyar a todos sus alumnos, no sólo a mí. Siguiendo con mis asesores, quiero agradecer a la Dra. Laura Xiomara Gutiérrez Guerrero quien también ha apoyado de gran manera durante la elaboración de mi tesis. En particular le he tomado un gran cariño e interés a esta sub área de la física de partículas y estoy sumamente agradecida en que me incluyeran en este proyecto. Espero ansiosa continuar en esta línea de

trabajo y seguir aprendiendo gracias a su mentoría.

En cuanto a las demás personas de la FCFM-UAS quiero agradecer a mis compañeros de aula: César, Lizet, Édgar y Mario. Fueron momentos muy agradables tanto en el salón, discutiendo problemas de tarea o haciendo las prácticas de laboratorio. Al Dr. Cristo Manuel Yee Rendón el coordinador de posgrado, quien no sólo me ha apoyado en sus clases, si no que también en otros detalles como la beca, resolver asuntos con profesores, estar pendiente de nosotros y en mi caso, me apoyó desde la licenciatura. En muchos aspectos, gracias a él pude continuar mis estudios a pesar de algunos obstáculos que se me presentaron.

Al personal administrativo y de intendencia de la facultad, a Brenda, Eliza, Gustavo, Marcela y a todos los demás con quienes siempre he contado para asuntos varios ya sea relacionado a lo académico, a trámites o a tener las comodidades necesarias para mi desempeño.

Por último pero no menos importante, a mi familia. A mi abuela Norma Luisa Noriega Sarabia quien en ausencia de mis padres ha estado para mi y mis hermanos dando su apoyo y sus cuidados. A mis tíos pero sobre todo a mi tía María Luisa Millán Noriega quien también en ausencia de mis padres ha estado al pendiente de nuestro bienestar. A mis hermanos Ale y Gala por su paciencia y comprensión ya que al yo estar concentrada en mis estudios y no poder cuidarlos o resolver sus complicaciones tanto como yo quisiera, han sabido hacerle frente a diversas dificultades por si mismos. Finalmente, quiero agradecer a mis padres que a pesar de que ya no se encuentren aquí, estoy segura de que estarían muy orgullosos de ver a su hija completar un grado más de estudio. Y no sólo eso, si no que se que estarían ansiosos de verme seguir cosechando éxitos.

Gabriela Natalia Gaxiola Millán,

Culiacán, México.

Resumen

El estudio de los hadrones, un tipo de partícula compuesta que involucra a quarks y gluones, es un área de gran interés en la física de altas energías. Parte del interés en este tópico se debe a que los quarks no se pueden encontrar libres y sólo los podemos encontrar unidos o “confinados” en partículas compuestas como los hadrones. El entendimiento de dichos estados confinados permite analizar la dinámica de los quarks y gluones que los constituyen. La Cromodinámica Cuántica es la teoría que describe las interacciones entre quarks y gluones pero el régimen no perturbativo es una limitante para obtener la dinámica hadrónica usando primeros principios. De esta manera, la comunidad de fenomenología de las interacciones hadrónica recurre a diferentes modelos, motivados teórica y experimentalmente, con el fin de proveer predicciones teóricas. En las últimas décadas el análisis de estos hadrones puede abordarse a través de diferentes experimentos, los cuales están situados en diferentes partes del mundo. Algunos sitios de investigación son SPS y LHC en CERN, NICA en JINR o RHIC en BNL. Pero el experimento que nos compete mayoritariamente en este trabajo, es el realizado en el acelerador nacional Thomas Jefferson (JLab) en USA. Para el avance del conocimiento en la física hadrónica, es importante hacer predicciones que puedan distinguirse claramente entre las mediciones experimentales de precisión.

Nuestro estudio se sitúa a bajas energías, en particular con un máximo alcanzado de 12 GeV en JLab. En las colisiones a grandes energías es más fácil extraer de manera individual los datos que queremos analizar. Sin embargo, a bajas energías los datos que queremos recopilar no se nos presentan de manera tan individual y es aquí donde nos tenemos que

apoyar de modelos matemáticos para darle significado físico al experimento. En este trabajo se analiza el Modelo de Interacción de Contacto (CI) para el cálculo de las masas de los quarks constituyentes de mesones vectoriales (V) y pseudoescalares (PS), además se calculan las masas de los mesones usando la ecuación de Bethe-Salpeter (BS) para finalmente determinar los factores de forma de transición entre mesones V y PS en el proceso $V \rightarrow PS + \gamma$. Se encuentran expresiones analíticas para dichos factores de forma de transición y se calculan numéricamente las soluciones para diez procesos y se obtienen los radios de carga asociados a sus correspondientes factores de forma.

Índice general

Agradecimientos	iii
Resumen	v
1. Partículas elementales y el Modelo Estándar	1
1.1. Partículas del Modelo Estándar	1
1.2. La materia y los fermiones	2
1.2.1. Los quarks	3
1.2.2. Los leptones	5
1.3. Interacciones y los bosones vectoriales	6
1.4. Generación de masas y el bosón de Higgs	8
2. QCD y la Física Hadrónica	13
2.1. Cromodinámica Cuántica	13
2.2. Hadrones	21
2.2.1. Mesones	21
2.2.2. Bariones	23
2.3. Modelo de Quarks	25
2.3.1. Octete de mesones	27
2.3.2. Octete y Decuplete de bariones	30
3. Interacción de Contacto	35

3.1. Función de Green en la ecuación de Dirac	36
3.2. Series perturbativas	40
3.3. Ecuaciones de Schwinger-Dyson	44
3.4. Interacción de contacto	46
4. Factores de forma de transición	49
4.1. Ecuación de GAP	50
4.2. Ecuación de Bethe-Salpeter	53
4.3. Vértice quark-fotón	56
4.4. Factores de forma de transición $V \rightarrow \gamma + PS$	58
5. Conclusiones	67
A. El grupo $SU(2)$ y $SU(3)$	69
B. Matrices de Dirac	73
Bibliography	75

Índice de figuras

1.1.	Clasificación de las partículas del Modelo Estándar: <i>i</i>) fermiones (anillo exterior), <i>ii</i>) bosones vectoriales (anillo intermedio) y <i>iii</i>) bosones escalares (parte central).	3
1.2.	Representación del potencial de Higgs.	9
1.3.	Representación diagramática de las interacciones permitidas en el Modelo Estándar después del rompimiento espontáneo de la simetría [15].	10
2.1.	Regla de Feynman para la interacción entre electrones y fotones en la QED. Donde μ es un índice de Lorentz y los índices α y β son índices espinoriales.	17
2.2.	Reglas de Feynman para las interacciones entre quarks y gluones en la QCD.	19
2.3.	Evolución de la constante de acoplamiento de la fuerza fuerte con la energía.	20
2.4.	Representación $\mathbf{3}$ para el triplete de quarks (derecha) y representación $\bar{\mathbf{3}}$ para el triplete de anti-quarks (izquierda).	27
2.5.	Octete de mesones en el Modelo de Quarks [32].	29
2.6.	Octete y Decuplete de bariones en el Modelo de Quarks.	32
2.7.	El multiplete de los mesones pseudoscalar compuestos por quarks u, d, s y c .	32
2.8.	El multiplete de mesones vectoriales compuestos por quarks u, d, s y c	32
3.1.	Diagrama de Feynman asociado al propagador desnudo del fermión.	40
3.2.	Propagador vestido de los fermiones en términos de la serie perturbativa al propagador del fermion.	41
3.3.	Representación diagramática compacta de los elementos de la serie.	42

3.4. Propagador del fermión después de condensar la serie perturbativa como se muestra en la Fig. 3.3.	43
3.5. Contribuciones cuánticas al diagrama de autoenergía del fermión en la Teoría Cuántica de Campos.	44
3.6. Serie perturbativa del propagador del fermion con el término explícito para la energía propia.	44
3.7. Representación diagramática de la interacción empleando la Eq. (3.16). . . .	47
4.1. Diagrama de Feynman de la SDE necesaria para la obtención de la masa vestida del quark.	50
4.2. Representación diagramática de la ecuación de Bethe-Salpeter. Los círculos azules representan a los propagadores de los quarks vestidos S , los círculos rojos es la amplitud de Bethe-Salpeter Γ de los mesones y, el rectángulo azul es el kernel quark-antiquark, \mathcal{K}	53
4.3. Función vestida del vértice transverso quark-fotón, $P_T(Q^2)$, definido en la Eq. (4.10).	57
4.4. Diagrama de triángulo del vértice $M_1\gamma M_2$ que sirve para calcular los factores de forma de transición.	58
4.5. Dependencia del factor de forma de transición $G^{M_1\gamma M_2}$ con respecto a la energía Q^2 para los distintos mesones.	63
4.6. Radios de carga de los factores de forma de transición $V \rightarrow \gamma + PS$ en el modelo de CI.	64
4.7. Factor de forma de transición $G^{\rho\gamma\pi}$ en función de Q^2 . El valor central de la curva es obtenida usando los parámetros Λ_{UV} de la Tab. 4.4 mientras que la banda representa una variación del 5% en el radio de carga estimado en el modelo de CI.	65

Capítulo 1

Partículas elementales y el Modelo Estándar

Para ayudarnos en nuestro entendimiento de la materia y las leyes que nos rodean, hemos desarrollado a través del tiempo diferentes teorías que nos ayudan en la comprensión de las mismas. Desde las primeras postulaciones por parte de los griegos para tratar de describir cómo están compuestos los cuerpos, hasta las formulaciones más modernas como la mecánica cuántica [1]. Para entender el mundo subatómico es preciso analizar la evolución de las teorías subyacentes de éste desde sus inicios hasta nuestros tiempos. En particular, en este capítulo se abordan los temas centrales de la física de partículas, sus interacciones y el contenido de materia.

1.1. Partículas del Modelo Estándar

El Modelo Estándar (SM por sus siglas en inglés) de las partículas elementales es una teoría cuántica de campos unitaria basada en el grupo de simetría $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ donde se acomodan partículas de espín 0, 1/2 y 1 de acuerdo a la invariancia de simetría del modelo. El éxito del Modelo Estándar no sólo radica en la alta precisión con la que sus observables pueden ser descritos, sino en gran medida a la colaboración teórica-experimental

que permite contrastar sus predicciones teóricas con las mediciones experimentales y encontrar un excelente acuerdo. No obstante, es necesario hacer mención que en la actualidad, existen interrogantes fundamentales a las cuales el Modelo Estándar, aún no tiene respuesta. El problema cosmológico, la energía y materia oscura, el problema de jerarquía, la masa de los neutrinos entre otras, hace pensar a la comunidad científica internacional que hay un camino largo que recorrer para encontrar la última teoría de la naturaleza.

La primera guía en la construcción del Modelo Estándar fue obtenida gracias al descubrimiento del electrón por parte de J. J. Thomson, donde se abrió un nuevo panorama para la descripción de los elementos de nuestro entorno [2]. El descubrimiento del núcleo atómico conformado por protones (p) [3] y neutrones (n) [4] extendió el panorama de las interacciones fundamentales, al traer consigo nuevas teorías que regían lo que ocurría a dichas escalas y donde los observables no podían entenderse con la teoría electromagnética ni las leyes de Newton. Posteriormente, los inconvenientes del sector electrodébil y fuerte fueron tomando mayor relevancia en las mediciones experimentales, tornando los años de 1900's cruciales para definir lo que hoy se conoce como el Modelo Estándar.

De esta manera, no sólo se desarrolló una nueva teoría para estudiar las fuerzas involucradas dentro del átomo, si no que también se impulsó el avance de los experimentos y equipos necesarios para descubrir dichas partículas. A la par, una vez descubiertas las partículas se procedió a clasificarlas y entender las ecuaciones que las gobiernan. En general, el Modelo Estándar consta de tres grandes grupos de partículas (Figura 1.1): bosones escalares (espín cero), fermiones (espín $1/2$) y bosones vectoriales (espín 1). Cada uno de ellos presentan propiedades y características únicas, que serán descritas a continuación.

1.2. La materia y los fermiones

Una de las grandes clasificaciones para las partículas del Modelo Estándar son los fermiones, éstos están distribuidos en dos grupos: los leptones y los quarks. Son llamados así por obedecer

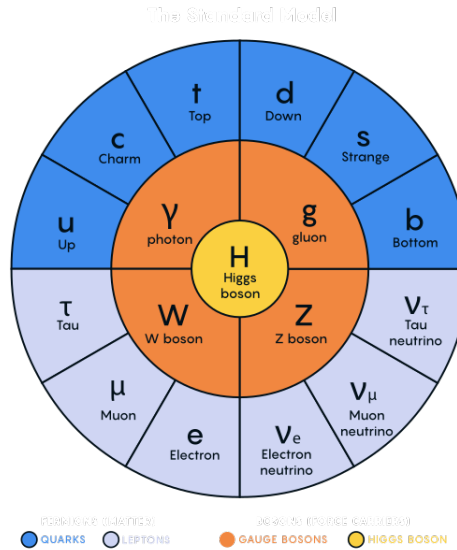


Figura 1.1. Clasificación de las partículas del Modelo Estándar: *i*) fermiones (anillo exterior), *ii*) bosones vectoriales (anillo intermedio) y *iii*) bosones escalares (parte central).

a la estadística de Fermi-Dirac y el principio de exclusión de Pauli¹. En el Modelo Estándar los fermiones son los responsables de los estados condensados de la materia, unidos por las partículas mediadoras de las fuerza, los bosones vectoriales. Gracias a las diferentes formas en las que los fermiones pueden combinarse para formar otras estructuras más complejas, y debido a las características de cada tipo de estructura depende fuertemente de los fermiones constituyentes, se dice que la materia está caracterizada por los fermiones constituyentes.

1.2.1. Los quarks

Los quarks fueron propuestos por Gell-Mann y Zweig en 1964 [5–7]. Ellos escribieron en su modelo que las partículas como el protón, neutrón, pión, etc., no eran más que estados condensados de partículas sub-atómicas a quienes nombró como quarks. En 1964, el descubrimiento de la partícula Ω^- posicionó al modelo de quarks, basado en el grupo $SU(3)_c$, como la explicación más viable para entender a los hadrones, estados condensados de tres quarks llamados bariones (qqq) o pares quark-antiquark llamados mesones ($q\bar{q}$). A lo largo

¹El principio de exclusión de Pauli establece que dos partículas con espín semientero no pueden encontrarse en el mismo estado cuántico.

de los años subsecuentes, se descubrieron los seis quarks que conforman el Modelo Estándar. A los “sabores” de los quarks se les conoce dentro de la física de partículas como: up (u), down (d), charm (c), strange (s), top (t) y bottom (b). Éstos seis, pueden agruparse a pares y acomodarlos para que transformen bajo el grupo $SU(2)_L$; a esta agrupación se le conoce como *familias de quarks*.

En cada pareja de ellos dentro de una familia, encontraremos a uno con carga $-1/3 e$ (tipo down) y otro con carga $+2/3 e$ (tipo up), donde e representa la carga fundamental del electrón. Como puede apreciarse, sus cargas eléctricas no son un múltiplo entero de e sino fracciones de ella, esta fue una de las propuestas controversiales hechas en el Modelo de Gell-Mann y Zweig. Actualmente, son las únicas partículas conocidas hasta ahora que satisfacen esta característica. Continuando con el análisis de la carga eléctrica, al agrupar tres quarks se pueden formar los nucleones, es decir el protón (uud) o el (udd) neutrón. Además, puede entenderse cómo es que a pesar de que individualmente, tienen una carga eléctrica no entera, este modelo puede acomodar a la perfección las cargas eléctricas para protones y neutrones.

Los quarks poseen también su antipartícula asociada llamada antiquark los cuales son representados por \bar{q} de manera general. Así, para cada quark se le añade una barra a su respectivo símbolo (\bar{u} , \bar{d} , \bar{c} , \bar{s} , \bar{t} , \bar{b}). Como es común para las antipartículas, sus propiedades intrínsecas son las mismas que en la partícula original exceptuando a la carga eléctrica, la cual es igual en magnitud pero de signo contrario [8].

Además de la agrupación en familias, existen otras características que son propias de los quarks entre las cuales están la masa, la carga de color y el espín, véase Tab. 1.1. Los quarks al ser partículas masivas presentan interacciones con las cuatro fuerzas fundamentales, ver Tab. 1.2: la fuerza gravitacional, la fuerza electromagnética, la fuerza débil y fuerza fuerte²³. Asimismo, los quarks pueden tener las tres cargas de color principales asociadas el

²En el caso del Modelo Estándar la fuerza gravitacional no es introducida debido a que es la más débil de las cuatro.

³En cuanto a la fuerza relativa, cada interacción conlleva a una **constante de acoplamiento**, la cual determina la magnitud de la fuerza en cada interacción. Algunos ejemplos son G en la fuerza gravitacional y

Quarks	Masa (MeV/c ²)	Carga (e)	Número Bariónico	Isospín débil	Hipercarga débil
up	2.3 ± 0.5	+2/3	1/3	+1/2	+1/3
down	4.8±0.3	-1/3	1/3	-1/2	+1/3
charm	1,275±25	+2/3	1/3	+1/2	+1/3
strange	95±5	-1/3	1/3	-1/2	+1/3
top	173,000±80	+2/3	1/3	+1/2	+1/3
bottom	4,180±30	-1/3	1/3	-1/2	+1/3

Tabla 1.1. Tabla de los seis quarks asociados a algunas de sus características principales. Las masas están expresadas en mega electronvolts y la carga eléctrica en fracciones de la carga del electrón.

grupo $SU(3)_c$: rojo, azul y verde; de la misma manera, los antiquarks poseen las tres cargas de anticolor: anti-rojo, anti-azul y anti-verde. De tal manera que la formación de estados condensados satisface la condición de formar estados *sin color* o *blancos*; la física asociada al grupo $SU(3)$ es denominada como la física del color o también conocida como Cromodinámica Cuántica (QCD por sus siglas en inglés).

Interacción	Mediadores	Fuerza relativa	Potencial
Débil	Bosones Z y W	10^{33}	$\frac{1}{r} e^{-m_{W,Z} r}$
Fuerte	gluones	10^{38}	$\sim r$
Gravitatoria	gravitones (hipotéticos)	1	$\frac{1}{r^2}$
Electromagnética	fotones	10^{36}	$\frac{1}{r^2}$

Tabla 1.2. Tabla de interacciones para las cuatro fuerzas elementales.

1.2.2. Los leptones

Los leptones son el otro subgrupo de partículas que, junto a los quarks, integran a los fermiones. Poseen características dinámicas similares, ya que también satisfacen la estadística de Fermi-Dirac y el principio de exclusión de Pauli, poseen espín 1/2, existen seis de ellos y se agrupan en familias. No obstante, existen dos diferencias fundamentales: *i*) no poseen k_e en la fuerza electrostática.

carga de color y al no poseer carga de color no conforman estados condensados de $SU(3)_c$ y, *ii*) poseen carga entera.

Al hablar de este tipo de partículas también podemos definir a seis tipos de ellos llamados “sabores”. Los seis sabores de leptones son: electrón (e^-), muón (μ^-), tau (τ^-), electrón-neutrino (ν_e), muón-neutrino (ν_μ) y tau-neutrino (ν_τ). Análogamente como con los quarks, las familias están conformadas por un par (ℓ^-, ν_ℓ) , con $\ell = \{e, \mu, \tau\}$, que transforma bajo el grupo $SU(2)_L$ del Modelo Estándar. Además, existen sus antipartículas que se diferencian de la carga opuesta⁴. Un resumen de las propiedades de los leptones puede encontrarse en la Tab. 1.3.

Leptones	Símbolo	Carga (e)	Masa (MeV/c^2)
electrón	e^-	-1	0.510
muón	μ^-	-1	105.658
tau	τ^-	-1	1,776.84
neutrino del electrón	ν_e	0	$< 2.2 \times 10^{-6}$
neutrino del muón	ν_μ	0	< 0.17
neutrino del tau	ν_τ	0	< 15.5

Tabla 1.3. Tabla de los seis leptones del Modelo Estándar y algunas de sus propiedades principales. [9–11]

1.3. Interacciones y los bosones vectoriales

La sección anterior describió a las partículas que conforman la materia, los fermiones. En esta sección hablaremos de las posibles interacciones que presentan entre ellas y las partículas que medían dichas interacciones, los bosones vectoriales. Hemos comentado que las partículas se acomodan en representaciones de los grupos de simetría $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Esto significa que existen 8 generadores del grupo de $SU(3)_c$, 3 generadores del grupo $SU(2)_L$ y un generador del grupo $U(1)_Y$ y a cada generador se le asocia un bosón vectorial para preservar

⁴Los neutrinos al ser eléctricamente neutros son su misma anti-partícula.

la simetría de norma⁵. En el caso de $SU(3)_c$, los 8 bosones vectoriales son los causantes de la estabilidad del núcleo atómico, ya que mantienen “pegados” a los nucleones, la fuerza tiene que ser más fuerte que la repulsión electromagnética y por eso se dice que estos bosones vectoriales son los mediadores de la fuerza fuerte. A estas partículas se le conoce como gluones y se denotan como g .

Los grupos de simetría de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ presentan un rompimiento de simetría, pero manteniendo una ley de conservación fundamental, la conservación de la carga eléctrica, Q . Esto se representa como,

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q. \quad (1.1)$$

Con respecto a los mediadores de la fuerza, se dice que cuando los 4 bosones vectoriales se encuentran, la simetría no está rota, y representan estados no físicos, mientras que cuando la simetría se rompe, generarán estados físicos. Es decir, si asociamos a $SU(2)_L$, los bosones vectoriales W_μ^i , con $i = 1, 2, 3$, y para $U(1)_Y$ el bosón vectorial B_μ , estos cuatro estados no físicos generarán cuatro estados físicos, W_μ^+ , W_μ^- , Z_μ^0 y A_μ . Es decir,

$$\{W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3, B_\mu\} \rightarrow \{W_\mu^+, W_\mu^-, Z_\mu^0, A_\mu\}. \quad (1.2)$$

Las partículas W_μ^\pm son bosones vectoriales que median corrientes cargadas, Z_μ^0 es el responsable de las corrientes neutras, los tres son los responsables de las interacciones débiles y, finalmente, A_μ el campo vectorial asociado al electromagnetismo, el fotón. Algunas propiedades de estas partículas pueden encontrarse en la Tab. 1.4.

⁵En general, un grupo $SU(N)$ posee $N^2 - 1$ generadores.

Bosones vectoriales	Símbolo	Carga (e)	Masa (GeV/c ²)
gluón	g	0	$< 1.3 \times 10^{-3}$
Bosón W positivo	W_μ^+	+1	80.377 ± 0.012
Bosón W negativo	W_μ^-	-1	80.377 ± 0.012
Bosón Z neutro	Z_μ^0	0	91.1876 ± 0.0021
Fotón	A_μ	0	$< 10^{-27}$

Tabla 1.4. Tabla de los seis leptones del Modelo Estándar y algunas de sus propiedades principales.

1.4. Generación de masas y el bosón de Higgs

Tal y como describimos en las secciones anteriores, hablamos sobre partículas de masa y partículas mediadoras. Pero no tendríamos partículas masivas de no ser por el mecanismo de Higgs, el cual es el encargado de proporcionarle masas a las partículas [12, 13]. A partir de aquí, nos daremos a la tarea de explicar de manera sencilla el mecanismo de Higgs.

Las ideas detrás del mecanismo de Higgs era el problema de la masa de las partículas. El modelo de Gell-Mann y Zweig, utilizaba un grupo de simetría $SU(3)_c$, requería invocar a este grupo para entender a los estados condensados con masa. A su vez, implicaba la existencia de bosones vectoriales no masivos, que mantuvieran la estabilidad del núcleo atómico. Todas las partículas encontradas eran fermiones y, por tanto, eran regidas por el Lagrangiano de Dirac [14],

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi = 0, \quad (1.3)$$

con $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$ y γ^μ las matrices de Dirac (ver Apéndice A), y $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. Esto significaba que la simetría quiral $SU(2)_L$ impedía escribir el término,

$$m\bar{\psi}\psi = m(\psi_R^\dagger \psi_L + \psi_L^\dagger \psi_R) \quad (1.4)$$

implicando que, si se realiza una transformación únicamente de $SU(2)_L$ sobre la componente

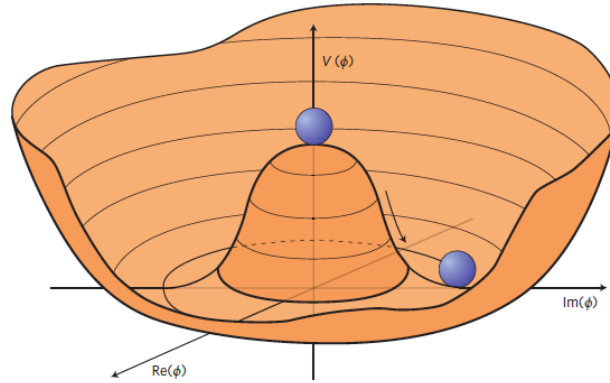


Figura 1.2. Representación del potencial de Higgs.

quiral izquierda, el término del lagrangiano violaría la invariancia de norma $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, por lo tanto cualquier término de mas estaría prohibido en esta teoría. Todo parecía indicar que, si la teoría de grupos nos ayudaría a entender la física de lo más elemental, ésta debería tener algún mecanismo de generación de masas. Este mecanismo fue propuesto en 1964 por Peter Higgs, François Englert y Robert Brout, pero es llamado generalmente, Mecanismo de Higgs.

La idea es hasta cierta medida muy simple, consiste en considerar que la física del sistema no es aquella descrita en la posición de mayor simetría, debido a que es una situación inestable, sino que la física que la naturaleza nos manifiesta es aquella que está descrita desde otro marco de referencia, donde la simetría se ha roto. Para esto, dichos investigadores consideraron un lagrangiano con un campo escalar extra, el campo de Higgs, ϕ . Dicho campo permea todo el espacio pero tiene un potencial expresado gráficamente en la Fig. 1.2.

Este potencial presenta un equilibrio inestable en $\Re(\phi) = \Im(\phi) = 0$; es en este punto donde se escribe la teoría del Modelo Estándar, donde todos los campos respetan la simetría de norma $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ y en consecuencia todos son no masivos. Sin embargo, cualquier fluctuación cuántica hará que la partícula de Higgs caiga al mínimo estable, y es en ese punto donde el Modelo Estándar se manifiesta en la naturaleza. Ahí, los campos fermiónicos adquieren masa, los campos vectoriales también, incluso el bosón de Higgs adquiere una masa y, más aún, las interacciones entre ellos es bien entendida en la Física de Altas Energías.

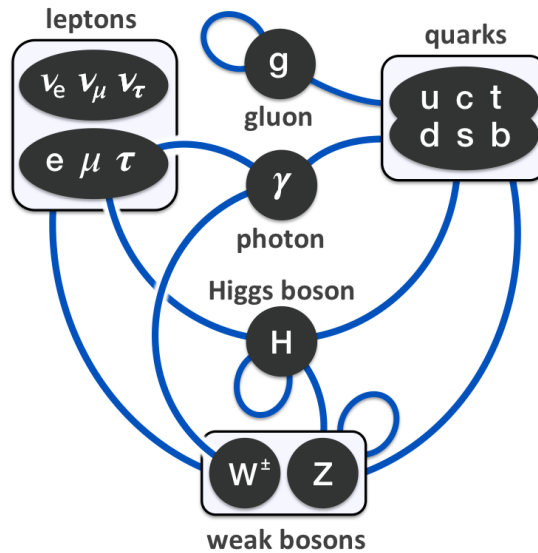


Figura 1.3. Representación diagramática de las interacciones permitidas en el Modelo Estándar después del rompimiento espontáneo de la simetría [15].

Algunas partículas no adquieren masa en este mecanismo, como lo son el fotón, el gluón y los neutrinos, todo consistente con la fenomenología del momento en el que fue propuesta. Finalmente, este mecanismo posee una característica fundamental y es que los acoplamientos y reglas de cómo interactúan todas las partículas es predicha con mucha certeza y es así como se manifiesta en la naturaleza. Esta representación puede observarse en la Fig. 1.3.

Finalmente, de esta representación gráfica es preciso notar que el campo de Higgs presenta interacciones con todas las partículas masivas del Modelo Estándar, incluso consigo misma. Así, se dice que el Mecanismo de Higgs es indispensable para entender la masa de todas las partículas ya que inclusive no se acopla con los neutrinos, el fotón y el gluón, haciendo toda la teoría consistente.

Concluiremos este capítulo con una de las principales motivaciones de esta tesis, la imposibilidad de entender la física hadrónica únicamente con los conceptos mencionados hasta ahora. Como se ha mencionado, el protón es una partícula que en el modelo de Gell-Mann y Zweig era entendida como el estado condensado de tres quarks (uud), es decir, un barión. Para este estado se conoce que la masa es de aproximadamente $938.27 \text{ MeV}/c^2$, y la suma de

las masas de los tres quarks no supera los $10 \text{ MeV}/c^2$, una enorme discrepancia. La generación de masas en la física hadrónica no puede ser igual que aquella que se presenta de las partículas fundamentales libres, porque en los bariones y mesones éstos se encuentran fuertemente ligados y algún efecto del confinamiento debe manifestarse en la masa física medida. Por otro lado, los hadrones, dependiendo de sus características dinámicas pueden acoplarse de cuatro formas distintas, dando pie a la clasificación de escalares, pseudoescalares, vectores y axial-vectores. Pero, a diferencia de las reglas asociadas a las partículas libres, en un estado condensado, ¿cuál es la regla de interacción entre los quarks ligados y el exterior con los fotones? por ejemplo. Esta interacción no es clara y debe ser modelada de alguna manera. Además, la física hadrónica se basa en que la QCD tiene un fenómeno de confinamiento, que se mencionará en el capítulo siguiente, aún no entendido del todo y requiere modelos motivados fenomenológicamente que nos ayuden a entender discrepancias que aparecen en los colisionadores como JLab, RHIC, BNL, etc. De esta manera, en esta tesis abordaremos el modelo de Interacción de Contacto. En este modelo es posible calcular masas de quarks ligados (masas vestidas), masas de hadrones, procesos de interacción entre fotones y hadrones y transiciones de estados hadrónicos emitiendo un fotón. El estudio de estos procesos de transición son los relevantes para este trabajo.

Capítulo 2

QCD y la Física Hadrónica

Las partículas elementales del Modelo Estándar son estudiadas en los colisionadores de partículas a altas energías. En ellos, reacciones violentas ocurren cuando la energía transferida es de alrededor de unos cientos de GeV hasta unos TeV. No obstante, en el régimen cuando la energía transferida es de algunas decenas de GeV, a estos niveles energéticos no se ha determinado del todo la física intrínseca de la naturaleza. Si bien, todavía no sabemos cual modelo es el definitivo, el más aceptado es el Modelo Estándar. En particular a este régimen energético, nos es útil utilizar diferentes modelos matemáticos para entender uno de los comportamientos del sector de $SU(3)_c$ del Modelo Estándar, el confinamiento. Para hablar del confinamiento, es necesario abordar con más detalle la teoría de $SU(3)_c$ o la Cromodinámica Cuántica (QCD por sus siglas del inglés).

2.1. Cromodinámica Cuántica

La Cromodinámica Cuántica es una teoría cuántica de campos basada en el grupo de simetría $SU(3)$ que contiene como campos fundamentales a los quarks y los gluones únicamente. Con el objetivo de entender la construcción matemática de éste veamos cómo se construye para estructuras matemáticas más simples y que tienen una realidad física bien entendida, la Electrodinámica Cuántica (QED por sus siglas en inglés).

La QED es la teoría que describe la interacción de electrones y fotones. Su dinámica fue entendida matemáticamente al imponer en el Lagrangiano de Dirac una simetría de norma, la simetría $U(1)$.

Consideremos el Lagrangiano de Dirac,

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi, \quad (2.1)$$

con ψ representando campos fermiónicos con masa m , en el caso de la QED electrones y para la QCD serán los quarks. Este lagrangiano es invariante bajo la transformación de fase,

$$\psi \rightarrow \exp(i q \alpha)\psi \quad (2.2)$$

donde q es una constante, que posteriormente identificaremos como la carga eléctrica, y α el parámetro infinitesimal de la transformación independiente del espacio-tiempo, es decir, $\alpha \neq \alpha(x)$. Si ahora se pide la invariancia local, conocida también como invariancia de norma, el Lagrangiano de Dirac, Ec. (2.1), no es invariante bajo la transformación local,

$$\psi \rightarrow \exp(i q \alpha(x))\psi \quad (2.3)$$

ya que el parámetro α ahora dependerá de las coordenadas espacio-temporales, es decir $\alpha = \alpha(x)$, se obtendrá que,

$$\delta \mathcal{L}_D \equiv \mathcal{L}'_D - \mathcal{L}_D = -q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \alpha(x). \quad (2.4)$$

Para recuperar la invariancia bajo la transformación de fase local, $U(1)$, es necesario modificar la definición de la derivada de tal manera que al realizar la transformación se

mantenga que $\delta\mathcal{L}_D = 0$. Se define entonces la derivada covariante como,

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - iq A_\mu \quad (2.5)$$

donde A_μ es un campo de norma que ayudará a reestablecer la invariancia de simetría, este campo será identificado como el fotón en la QED. Así, el Lagrangiano de Dirac tomará la forma,

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i \not{D} - m)\psi. \quad (2.6)$$

Para mantener la invariancia, es necesario que el campo A_μ transforme como,

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\alpha(x). \quad (2.7)$$

Así, las relaciones dadas por Ec. (2.3), Ec. (2.5) y Ec. (2.7) serán las reglas de la transformación de norma del grupo $U(1)$, que mantienen a la Ec. (2.6) invariante, es decir,

$$\delta\mathcal{L}_D = 0, \quad (2.8)$$

dando lugar así, a una ley de conservación fundamental en la física, la conservación de la carga eléctrica, Q . Es por este motivo que el grupo de simetría de la QED se representa como $U(1)_Q$.

Con respecto al campo auxiliar A_μ , es preciso asociarle una dinámica para que sus ecuaciones de movimiento no sean triviales. El lagrangiano que preserva la invariancia $U(1)_Q$ es el de Maxwell,

$$\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (2.9)$$

con el tensor de Maxwell definido como,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.10)$$

Las reglas de transformación expresadas con anterioridad preservan también que,

$$\delta\mathcal{L}_{Maxwell} = 0 \quad (2.11)$$

y como consecuencia adicional, el término de masa $m_A^2 A_\mu A^\mu$ es prohibido, ya que viola la simetría de $U(1)_Q$. Es decir, una consecuencia de pedir la invariancia local de $U(1)_Q$ al Lagrangiano de Dirac genera la necesidad de introducir un campo auxiliar sin masa. Es por este motivo que la QED está sostenida de la invariancia de norma de $U(1)_Q$ a través del lagrangiano,

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_{Maxwell}. \quad (2.12)$$

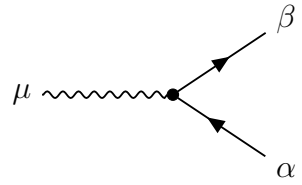
Para concluir, podemos notar que si expandimos el lagrangiano, se tiene que

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + q \bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad (2.13)$$

donde el primer y segundo términos nos proporcionarán las reglas de propagación de los campos ψ y A_μ , y el tercer término involucra el producto de tres campos, que se interpreta como el término de interacción entre ψ y A_μ . Este último término nos conlleva a identificar la única regla de Feynman asociada a la QED y que está representada en la Fig. 2.1.

La Cromodinámica Cuántica es una teoría similar a la QED pero donde la simetría impuesta es no abeliana. Aunque el concepto de preservar la simetría es el mismo, existen sutilezas que manifiestan una física completamente diferente a la QED ¹.

¹En este documento se procederá a una revisión rápida de éste aunque el lector interesado puede consultar la Ref. [16].



$$= iq(\gamma^\mu)_{\alpha\beta} . \quad (2.14)$$

Figura 2.1. Regla de Feynman para la interacción entre electrones y fotones en la QED. Donde μ es un índice de Lorentz y los índices α y β son índices espinoriales.

La QCD tiene un lagrangiano que se construye de manera muy similar a la QED, este tiene la forma,

$$\mathcal{L}_{QCD} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_g , \quad (2.15)$$

donde

$$\mathcal{L}_q = \sum_{j=1}^6 \bar{\psi}_j (i \not{D} - m) \psi^j , \quad (2.16)$$

$$\mathcal{L}_g = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} . \quad (2.17)$$

En las expresiones anteriores se ha mantido explícitamente la suma sobre los 6 sabores de quarks y los 8 gluones. Aunque tiene la misma forma que \mathcal{L}_{QED} , debemos notar que debido al carácter anticonmutativo, la derivada covariante y el tensor de esfuerzos toman ahora la forma,

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_S T^a A_\mu^a , \quad (2.18)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_S f_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c , \quad (2.19)$$

donde g_S es la constante del grupo $SU(3)_c$ ² y T^a los generadores del grupo $SU(3)_c$ que

²El subíndice “S” hace referencia a la mediación de la fuerza fuerte (por sus siglas en inglés).

satisfacen el álgebra de Lie,

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad (2.20)$$

con f^{abc} las constantes de estructura del grupo de simetría. Además, es necesario mencionar que para preservar la simetría de norma, los campos de los quarks y gluones deben transformar como,

$$\psi^j \rightarrow \exp(i g_S \alpha^a T^a) \psi^j, \quad (2.21)$$

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a + \partial_\mu \alpha^a - g_S f_{bc}^a \alpha^b A_\mu^c, \quad (2.22)$$

donde se ha utilizado en las expresiones anteriores la convención de suma de Einstein.

El lagrangiano de la QCD puede ser expandido para analizar, al igual que hemos hecho en la QED, término a término con el fin de darle una interpretación. Del análisis de cada uno se obtendrá que las ecuaciones de movimiento de los quarks y los gluones serán análogas a las de los electrones y fotones de la QED. Sin embargo emergerán dos interacciones no abelianas, las auto-interacciones entre tres y cuatro gluones provenientes de la expansión del término $G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}$. Las reglas de interacción entre quarks y gluones son esquematizadas en la Fig. 2.2.

Las reglas asociadas a las teorías cuánticas de campos, también conocidas como Reglas de Feynman, son cruciales para el entendimiento de la evolución dinámica de los parámetros de la teoría. En particular, para la QCD los vértices de auto-interacciones de gluones, conocidos como vértices no-abelianos, provocan que la evolución de la constante g_S con la energía Q^2 sea de la forma,

$$\frac{dg_S}{dt} = -b_S \frac{g_S^3}{16\pi^2} \quad (2.23)$$

con $t = \log(Q/Q_0)$, Q_0 una escala arbitraria y $b_S = 11 - 4n_f/3$ y n_f el número de familias³. Si

³Esta relación es a primer orden en la teoría perturbativa de la QCD.

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1: } \alpha, a \xrightarrow{k_1} \text{ vertex } \begin{cases} \beta, b \\ \gamma, c \end{cases} \text{ with momenta } k_2, k_3 \\
 & \qquad \qquad \qquad = -g_S f^{abc} [g^{\alpha\beta}(k_1 - k_2)^\gamma + g^{\beta\gamma}(k_2 - k_3)^\alpha + g^{\gamma\alpha}(k_3 - k_1)^\beta] \\
 & \text{Diagram 2: } \alpha, a \text{ and } \delta, d \text{ meet at a vertex from which } \beta, b \text{ and } \gamma, c \text{ emerge} \\
 & \qquad \qquad \qquad = ig_S^2 \begin{bmatrix} f^{abe} f^{cde} (g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \\ + f^{ace} f^{bde} (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\delta} g^{\gamma\beta}) \\ + f^{ade} f^{bce} (g^{\alpha\beta} g^{\delta\gamma} - g^{\alpha\gamma} g^{\delta\beta}) \end{bmatrix} \\
 & \text{Diagram 3: } a, \mu \text{ meets a vertex from which } i \text{ and } j \text{ emerge} \\
 & \qquad \qquad \qquad = ig_S \gamma^\mu \mathbf{T}_{ij}^a
 \end{aligned}$$

Figura 2.2. Reglas de Feynman para las interacciones entre quarks y gluones en la QCD.

comparamos este número con el cálculo puramente abeliano, es decir con la QED, se tiene que el resultado al mismo orden en la teoría perturbativa sería, $b_1 = -4n_f/3 - 1/10$ lo cual corresponde a un valor siempre negativo, mientras que en la QCD, $b_S > 0$ [17, 18]. Esto causa una enorme diferencia fenomenológica y es una de las pruebas contundentes de que la QCD es una teoría fundamental de la naturaleza [19]. La Fig. 2.3 muestra el comportamiento con la energía que tiene la constante $\alpha_S \equiv g_S^2/(4\pi)$ y el acuerdo que tiene la teoría con los datos experimentales es bastante bueno⁴. Más aún, es a partir de este resultado que puede entenderse las dos caras de la QCD, la libertad asintótica y el confinamiento. La libertad asintótica ocurre cuando la constante de la fuerza fuerte ha sido reducida considerablemente tal que los

⁴En el gráfico, la predicción teórica considera no sólo cálculos a primer orden en la QCD sino también cálculos de más alto orden.

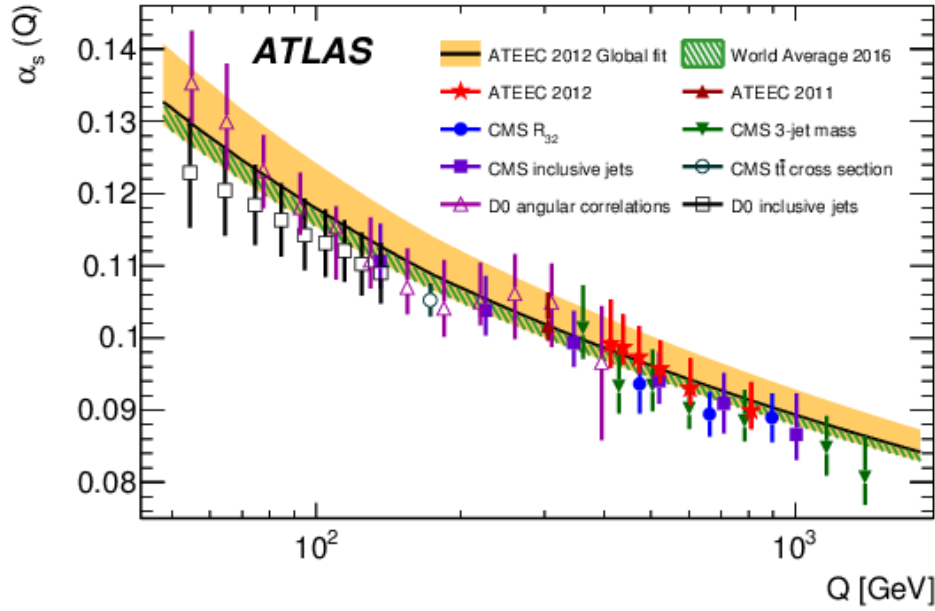


Figura 2.3. Evolución de la constante de acoplamiento de la fuerza fuerte con la energía.

quarks constituyentes se consideran libres. Por ejemplo, cuando una colisión violenta ocurre y los enlaces son rotos de tal suerte que pueden moverse libremente, esto es cuando $Q \approx 10^3$ GeV. Es por eso que los experimentos como el LHC, pueden confrontar sus resultados con la teoría perturbativa de la QCD ya que la constante de acoplamiento es todavía “pequeña”. Por otro lado, tenemos al confinamiento, donde los estados fundamentales no son los quarks y gluones sino los hadrones. En esta región, la constante de acoplamiento entre los quarks y gluones es “grande” y la teoría perturbativa falla para proveer predicciones confiables. Es así que debe tomarse con cuidado la extrapolación del régimen perturbativo al no-perturbativo ya que es posible cometer errores en la interpretación de los resultados.

A partir de ahora, la Física que nos interesa describir será la física de los grados de libertad fuertemente ligados, los hadrones. Para eso, introduciremos el concepto de Hadrones los diferentes tipo y el Modelo de partones para su clasificación en el Modelo de quarks de Gell-Mann y Zweig.

2.2. Hadrones

En el capítulo anterior nos introdujimos en el concepto de las partículas elementales, sus clasificaciones y las características de las mismas. Sin embargo, existe otro tipo de clasificación para las partículas que conforman estados fuertemente ligados, estos son llamados “Hadrones”.

El modelo de quarks de Gell-Mann y Zweig proponía la existencia de estos estados. En este modelo, las partículas fuertemente interactuantes sólo podían agruparse de dos maneras: mesones y bariones. Proponía también que no podía existir estados con cuatro quark y cinco quarks [20], los cuales están en continua búsqueda en los colisionadores de partículas [21–23]. A continuación introduciremos los conceptos de mesones y bariones y las partículas que corresponden a cada grupo.

2.2.1. Mesones

Se define a los mesones como un tipo de partícula compuesta de un par quark-antiquark ($q\bar{q}'$), ellos están ligados gracias a la interacción fuerte de la QCD. Pertenecen a la familia de los bosones⁵ y al estar compuestos por quarks, interactúan con las cuatro fuerzas fundamentales. La Tab. 2.1 muestra algunos mesones y algunas propiedades como: los quarks constituyentes, el tipo de interacción y su masa.

Como puede observarse en la Tab. 2.1, existen diferentes tipos de mesones. Previamente se enlistan algunos que pertenecen a los pseudoescalares y vectoriales pero también existen los escalares y axial-vectoriales.

Vamos a definir a todos estos tipos de mesones. Empecemos por el mesón escalar, el cual es aquel cuyo momento angular total (denotado con \mathbf{J}) es 0. El momento angular total es la suma del espín (\mathbf{S}) y de su momento angular orbital (\mathbf{L}). Un mesón al ser una partícula compuesta de fermiones es preciso recordar que éstos tienen espín 1/2. De esta manera el espín del mesón puede ser $S = 1$ o $S = 0$. Dicho esto, en el caso del mesón escalar, tanto el espín como su momento angular orbital son ambos 0.

⁵Su ecuación de movimiento es la Ecuación de Klein-Gordon.

Mesón	Símbolo	Antipartícula	Partículas que lo forman	Tipo	Masa en reposo (MeV/c ²)
Pion cargado	π^+	π^-	$u\bar{d}$	Pseudoescalar	139.57018 ± 0.00035
Pion neutro	π^0	π^0	$u\bar{u}$ o $d\bar{d}$		134.9766 ± 0.0006
Kaon	K^+	K^-	$u\bar{s}$		493.677 ± 0.016
Kaon	K^0	\bar{K}^0	$d\bar{s}$		497.614 ± 0.024
Rho cargado	ρ^+	ρ^-	$u\bar{d}$	Vector	775.4 ± 0.4
Rho neutro	ρ^0	ρ^0	$u\bar{u}$ o $d\bar{d}$		775.49 ± 0.34
Omega	ω	ω	$u\bar{u}$ o $d\bar{d}$		782.65 ± 0.12
Phi	ϕ	ϕ	$s\bar{s}$		1019.445 ± 0.020
D	D^+	D^-	$c\bar{d}$		2010.27 ± 0.17
J/Psi	J/ψ	J/ψ	$c\bar{c}$		3096.916 ± 0.011
Upsilon	Υ	Υ	$b\bar{b}$		9460.30 ± 0.26

Tabla 2.1. Algunos de los mesones principales y sus características [24–27].

El momento angular orbital se debe al movimiento de un quark alrededor del otro. Análogamente al momento angular orbital clásico definido como el producto cruz de la posición y el momento lineal, ahora definimos un producto cruz entre un operador de posición y el operador de momento lineal. Debido a su naturaleza, el momento angular orbital del mesón es un operador también y al estar en terreno de la Mecánica Cuántica, los valores obtenidos son cantidades cuantizadas.

Otra de las características del mesón escalar es que posee paridad par. En términos físicos, nos referimos a la transformación de paridad a aquella que invierte el signo al efectuar la transformación espacial. Una paridad par es aquella que deja invariante al objeto matemático en cuestión al invertir el signo de las coordenadas. En cambio, la paridad impar invierte también el signo del objeto matemático a tratar. Explícitamente, si \hat{P} es el operador de paridad y ϕ la función de onda de un mesón, se dice que ϕ es un mesón con paridad par si,

$$\hat{P}\phi = +\phi, \quad (2.24)$$

y es impar si,

$$\hat{\mathcal{P}}\phi = -\phi. \quad (2.25)$$

En su mayoría, los mesones escalares son observados en procesos de aniquilación protón-antiprotón, en dispersiones mesón-mesón y en decaimientos de mesones vectoriales.

Lo importante de haber detallado previamente las características de los mesones escalares, es que éstos conceptos nos ayudarán a caracterizar a los otros tipos de mesones. Por ejemplo, el mesón pseudoescalar es aquel que posee momento angular total igual a 0 y paridad impar. El mesón vectorial es aquel que posee momento angular total igual a 1 al igual que el axial-vector, sin embargo, ambos tienen paridad contraria siendo paridad par para el mesón vectorial e impar para el mesón axial-vector. Estas características nos servirán más adelante cuando obtengamos los factores de forma de transición de mesones vectoriales a pseudoescalares. De momento estas características están sintetizadas en la Tab. 2.2.

Tipo de mesón	Espín (S)	Momento angular orbital (L)	Paridad total (P)	Momento angular total (J)	Notación (J^P)
Pseudoescalar	0	0	−	0	0 [−]
Axial-vector	0,1	1	+	1	1 ⁺
Vector	1	0,2	−	1	1 [−]
Escalar	1	1	+	0	0 ⁺

Tabla 2.2. Números cuánticos de los tipos de mesones.

Además, es preciso mencionar que las características dinámicas de cada uno son diferentes, pero serán abordadas en un capítulo posterior.

2.2.2. Bariones

Continuando con los hadrones, otra subcategoría importante son los bariones. Ellos son un tipo de partículas subatómicas compuestas que poseen un número impar de quarks de valencia,

que por lo general son tres ⁶. Este subgrupo también entra en la categoría de fermiones debido a su espín semi entero.

Barión	Símbolo	Quarks	Masa (MeV/c ²)	I ₃	S	Q (e)	J ^P	Decaimiento	
Protón	p^+	uud	938.272	1/2	0	+1	1/2 ⁺	No observado	
Neutrón	n^0	udd	939.565	1/2	0	0		$p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$	
Lambda	Λ^0	uds	1 115.683 ± 0.006	0	-1	0		$p^+ + \pi^-$ o $n^0 + \pi^0$	
Sigma	Σ^+	uus	1 189.37 ± 0.07	1	-1	+1		$p^+ + \pi^0$ o $n^0 + \pi^+$	
	Σ^0	uds	1 192.642 ± 0.024	1	-1	0		$\Lambda^0 + \gamma$	
	Σ^-	dds	1 197.449 ± 0.030	1	-1	-1		$n^0 + \pi^+$	
Xi	Ξ^0	uss	1 314.86 ± 0.20	1/2	-2	0		$\Lambda^0 + \pi^0$	
	Ξ^-	dss	1 321.71 ± 0.07	1/2	-2	-1		$\Lambda^0 + \pi^-$	
Delta	$\Delta^{++}(1232)$	uuu	1 232 ± 2	3/2	0	+2		3/2 ⁺	$p^+ + \pi^+$
	$\Delta^+(1232)$	uud	1 232 ± 2	3/2	0	+1			$\pi^+ + n^0$ o $\pi^0 + p^+$
	$\Delta^0(1232)$	udd	1 232 ± 2	3/2	0	0	$\pi^0 + n^0$ $\pi^- + p^+$		
	$\Delta^-(1232)$	ddd	1 232 ± 2	3/2	0	-1	$\pi^- + n^0$		
Sigma	$\Sigma^{*+}(1385)$	uus	1 382.80 ± 0.35	1	-1	+1	3/2 ⁺	$\Lambda^0 + \pi^+$ o $\Sigma^+ + \pi^0$ o $\Sigma^0 + \pi^+$	
	$\Sigma^{*0}(1385)$	uds	1 383.7 ± 1.0	1	-1	0		$\Lambda^0 + \pi^0$ o $\Sigma^+ + \pi^-$ o $\Sigma^0 + \pi^0$	
	$\Sigma^{*-}(1385)$	dds	1 387.2 ± 0.5	1	-1	-1		$\Lambda^0 + \pi^-$ $\Sigma^0 + \pi^-$ o $\Sigma^- + \pi^0$	
Xi	$\Xi^{*0}(1530)$	uss	1 531.80 ± 0.32	1/2	-2	0	3/2 ⁺	$\Xi^0 + \pi^0$ o $\Xi^- + \pi^+$	
	$\Xi^{*-}(1530)$	dss	1 535.0 ± 0.6	1/2	-2	-1		$\Xi^0 + \pi^-$ o $\Xi^- + \pi^0$	
Omega	Ω^-	sss	1 672.45 ± 0.29	0	-3	-1	$\Lambda^0 + K^-$ o $\Xi^0 + \pi^-$ o $\Xi^- + \pi^0$		

Tabla 2.3. Bariones destacables y sus características.

Los bariones también son fermiones que interactúan fuertemente, es decir, que sobre ellos actúa la fuerza nuclear fuerte que mantiene unidos a los quarks. La mayor parte de la materia

⁶Se han descubierto y observado bariones exóticos compuestos de cinco quarks llamados *pentaquarks* [28–30].

que conocemos del día a día es materia bariónica, como es el caso de los átomos. Al poseer protones y neutrones los cuales están compuestos por tres quarks, entran perfectamente dentro de la definición de bariones. Así, se dice entonces que un protón está compuesto de tres quarks de valencia tipo uud mientras que el neutrón está compuesto de la combinación ddu . Debemos puntualizar que, estas combinaciones no significan que no exista la probabilidad de encontrar a otros sabores de quarks en el protón y en el neutrón, sino que únicamente puntualiza el hecho de que éstos son los que proveen la carga a la partícula en el estado final y que tienen mayor probabilidad de ser encontrados en dichos bariones. En la Tab. 2.3 se pueden apreciar algunos bariones conocidos, el contenido de quarks de valencia, masa, el Isoespín (\mathbf{I}_3), Extrañeza (\mathbf{S}), Carga eléctrica (Q), Momento total angular (\mathbf{J}) y Paridad (\mathbf{P}), así como algunos decaimientos.

2.3. Modelo de Quarks

El modelo de quarks es una clasificación esquemática para los hadrones en términos de sus quarks de valencia, es decir, los quarks que determinan los números cuánticos de los hadrones. Este modelo subraya al grupo de sabor $SU(3)$ o bien, el **camino óctuple** o del **octete** el cual, logró clasificar esquemáticamente de manera compacta y consistente a los hadrones que se fueron descubriendo entre los 50's y 60's. Este modelo fue propuesto por Murray Gell-Mann y Yuval Ne'eman de manera independiente y simultánea en 1961 [5, 31].

En cuanto a su organización, la teoría de grupos nos brinda las herramientas matemáticas para el desarrollo de la misma. En cada caso, las partículas están organizadas en mesones o bariones, de los cuales, también están separados por su espín.

El entendimiento matemático del modelo de quarks radica en la teoría de grupos. En ella, los quarks están acomodados en las representaciones fundamentales del grupo $SU(3)$ y serán los bloques fundamentales de los hadrones de acuerdo a tres simples reglas:

- los quarks tienen cargas fraccionarias,

- no existen en la naturaleza los quarks de manera libre,
- sólo se combinan formando hadrones usando tres en la combinación $|qq'q''\rangle$ o dos en la combinación $|q\bar{q}'\rangle$.

Originalmente, el modelo de quarks comenzó con los tres quarks más ligeros, u , d y s , acomodándolos como,

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

los cuales transforman bajo el grupo de $SU(3)$ mediante las ocho matrices de Gell-Mann, λ_i , definidas en el Apéndice A. Así, una transformación general de los campos de los quarks en el espacio de $SU(3)$, el espacio de *color*, será representada como,

$$|\psi'\rangle = \exp(-i\theta^a T^a) |\psi\rangle, \quad a = 1, \dots, 8, \quad (2.27)$$

con $T^a \equiv \lambda^a/2$ los generadores del grupo de $SU(3)$ y θ^a los parámetros de la transformación. Estos bloques fundamentales, para satisfacer las tres condiciones del modelo deberían tener ciertos números cuánticos, estos se encuentran en la Tab. 2.4.

Quark	Isoespín (I_3)	Extrañeza (s)	No. Bariónico (B)	Carga eléctrica (Q)
$ u\rangle$	1/2	0	1/3	2/3
$ d\rangle$	-1/2	0	1/3	-1/3
$ s\rangle$	0	-1	1/3	-1/3

Tabla 2.4. Números cuánticos de los quarks ligeros en el Modelo de Quarks.

Aprovechando el conocimiento de la teoría de grupos, es posible entender la generación de los hadrones usando una representación gráfica. En la Figura 2.4 se encuentra la representación del triplete de quarks, denotado por $\mathbf{3}$, y el triplete de anti-quarks, $\bar{\mathbf{3}}$. Esta representación contempla en el eje horizontal a la componente I_3 de isoespín y en el eje vertical a la

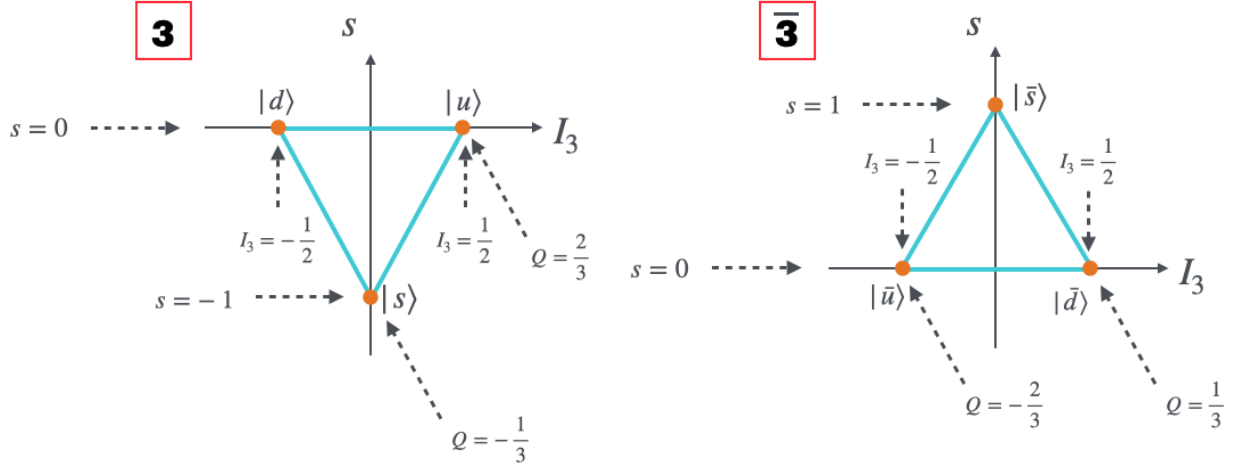


Figura 2.4. Representación $\mathbf{3}$ para el triplete de quarks (derecha) y representación $\bar{\mathbf{3}}$ para el triplete de anti-quarks (izquierda).

componente de extrañeza, s ⁷. Con dicha elección gráfica, es posible entender cómo pasar de un estado a otro gracias a los operadores de creación y aniquilación. Dado que las matrices de Gell-Mann contienen en sus elementos subconjuntos de las matrices de Pauli, se definen,

$$I_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2) \quad (2.28)$$

$$V_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5) \quad (2.29)$$

$$U_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7) \quad (2.30)$$

donde el operador I_{\pm} únicamente comunica entre los estados $|u\rangle$ y $|d\rangle$, V_{\pm} comunica a los estados $|u\rangle$ y $|s\rangle$ y U_{\pm} comunica a los estados $|d\rangle$ y $|s\rangle$.

Las propiedades heredadas de $SU(2)$ para suma de momentos angulares, son aplicadas ahora para $SU(3)$, pero con el objetivo de formar hadrones.

2.3.1. Octete de mesones

Una propiedad importante del Modelo de Quarks, es que al estar inmerso en una teoría de grupos, es posible entender cómo se creaban las partículas, a nivel matemático de la misma

⁷Para obtener la representación $\bar{\mathbf{3}}$ se cambia el signo de I_3 , s y Q .

manera que se entiende la suma de momentos angulares de un sistema de dos partículas con espín $1/2$.

Antes de pasar a los hadrones, recordemos que la representación de los espines de las partículas están dentro del grupo $SU(2)$. Al igual que en el isospín, el espín puede representarse por dos estados,

$$\left| \frac{1}{2}; +\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |\uparrow\rangle \quad \text{y} \quad \left| \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |\downarrow\rangle, \quad (2.31)$$

donde se ha usado la notación $|s; m_s\rangle$ con s el espín y m_s la proyección del espín en la dirección z , asignando a $m_z = +1/2$ la proyección hacia arriba y a $m_z = -1/2$ la proyección hacia abajo.

En la teoría de suma de momentos angulares, se tiene que al sumar dos espines $1/2$, se obtiene la representación triplete,

$$|1; +1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \quad (2.32)$$

$$|1; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \quad (2.33)$$

$$|1; -1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \quad (2.34)$$

y la representación singlete

$$|0; 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (2.35)$$

donde $2^{-1/2}$ es el factor de normalización⁸. Así, en términos de la teoría de grupos, este resultado puede ser expresado como,

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}. \quad (2.36)$$

⁸Estas expresiones pueden extenderse a objetos más complejos y para ellos puede consultarse los coeficientes de Clebsh-Gordan.

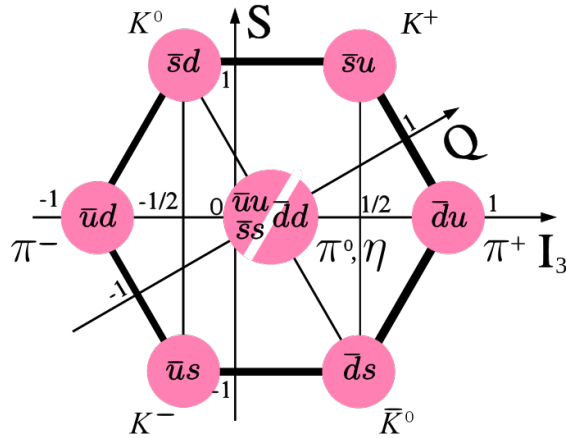


Figura 2.5. Octete de mesones en el Modelo de Quarks [32].

Una propiedad interesante de triplete es que es simétrico ante el intercambio de la posición 1 con la posición 2, mientras que el singlete es antisimétrico ante la misma operación.

Entender la formación de estados ligados de quarks puede hacerse siguiendo la misma metodología que para la suma de momentos angulares. El Modelo de Quarks consta de mesones, que son los estados ligados de un par quark-antiquark. Usando la teoría de grupos, se encuentra que la representación $\mathbf{3}$ de quarks con la representación $\bar{\mathbf{3}}$ de los antiquarks, genera los estados,

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \quad (2.37)$$

obteniendo la representación $\mathbf{8}$, conocida como octete, y un singlete. Utilizando las representaciones gráficas de la Fig. 2.4, es posible entender que el octete de mesones está dado por la Fig. 2.5.

Así, el octete puede acomodar a las partículas de la Tab. 2.5 de acuerdo a su contenido de sabor. Es importante mencionar que para la construcción de la función de onda de los mesones, e incluso de los bariones, es preciso utilizar los coeficientes de Clebsh-Gordan, la cual es la que proporciona información relevante para la fenomenología hadrónica.

Contenido de quarks	I_3	Q	s	B	Partículas
$u\bar{u}$ y $d\bar{d}$	0	0	0	0	π^0 y η
$u\bar{d}$	+1	+1	0	0	π^+
$d\bar{u}$	-1	-1	0	0	π^-
$u\bar{s}$	+1/2	+1	+1	0	K^+
$s\bar{u}$	-1/2	-1	-1	0	K^-
$d\bar{s}$	-1/2	0	+1	0	K^0
$s\bar{d}$	+1/2	0	-1	0	\bar{K}^0

Tabla 2.5. Quarks constituyentes, números cuánticos y partículas en el Octete de mesones según el Modelo de Quarks.

2.3.2. Octete y Decuplete de bariones

Para el caso de los bariones se tiene que utilizar la combinación de tres representaciones **3**.

De la teoría de grupos, se obtiene que,

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}, \quad (2.38)$$

dando lugar a la representación **10**, conocida como el decuplete de bariones, dos representaciones octetes, y un singlete. El octete de bariones es de crucial importancia ya que es a través de él que tenemos la información del protón y del neutrón. En la Fig. 2.6 se presenta el octete y el decuplete de bariones del Modelo de Quarks; además, en las Tabs. 2.6 y 2.7 se presentan las partículas del octete y decuplete de bariones según el Modelo de Quarks.

Contenido de quarks	I_3	Q	s	B	Partículas
uud	+1/2	+1	0	1	p
udd	-1/2	0	0	1	n
suu	+1	+1	-1	1	Σ^+
uds	0	0	-1	1	Λ^0 y Σ^0
dds	-1	-1	-1	1	Σ^-
ssu	+1/2	0	-2	1	Ξ^0
dss	-1/2	-1	-2	1	Ξ^-

Tabla 2.6. Quarks constituyentes, números cuánticos y partículas en el Octete de bariones según el Modelo de Quarks.

Podemos entonces notar que, si el modelo era correcto el Ω^- debería existir, lo cual fue

Contenido de quarks	I_3	Q	s	B	Partículas
uuu	$+3/2$	$+2$	0	1	Δ^{++}
uud	$+1/2$	$+1$	0	1	Δ^+
udd	$-1/2$	0	0	1	Δ^0
ddd	$-3/2$	-1	0	1	Δ^-
suu	$+1$	$+1$	-1	1	Σ^{*+}
uds	0	0	-1	1	Σ^{*0}
dds	-1	-1	-1	1	Σ^{*-}
ssu	$+1/2$	0	-2	1	Ξ^{*0}
dss	$-1/2$	-1	-2	1	Ξ^{*-}
sss	0	-1	-3	1	Ω^-

Tabla 2.7. Quarks constituyentes, números cuánticos y partículas en el Decuplete de bariones según el Modelo de Quarks.

confirmado en 1964. No obstante la función de onda del Ω^- era completamente simétrica, contradiciendo la estadística de Fermi-Dirac, expresando que la función de onda de un fermión es completamente antisimétrica. Así, la solución no fue muy elaborada, una función de onda completamente simétrica puede convertirse en completamente antisimétrica multiplicándola por un objeto antisimétrico. El objeto matemático sería entonces el tensor antisimétrico de Levi-Civita, ε_{ijk} , de tal manera que,

$$|\Omega^-\rangle = \varepsilon_{ijk}|u_i u_j u_k\rangle, \quad (2.39)$$

solucionando el problema, y naciendo así la Cromodinámica Cuántica en la Física Hadrónica.

En este trabajo consideramos hadrones con cinco sabores de quarks (u, d, s, c, b) y los multipletes de $SU(5)$ predichos por el modelo de quarks [5–7]. Como ejemplo, se presenta un conjunto de mesones pseudoscalar correspondientes en la Fig. 2.7. En la Fig. 2.8 se presenta un 15-plet y un singlete de mesones vectoriales compuestos por quarks u, d, s y c .

$$\Gamma_{V_{1^-, \mu}} = \gamma_\mu^\perp E_V(P), \quad (2.40)$$

En el próximo capítulo veremos cómo se calculan las masas y los factores de forma de estos múltipletes, utilizando las ecuaciones de Schwinger-Dyson (SDE por sus siglas en inglés) y Bethe-Salpeter (BSE, por sus siglas en inglés).

Capítulo 3

Interacción de Contacto

En la Física Hadrónica diversos procesos interesantes se encuentran bajo estudio en los laboratorios como en el Thomas Jefferson National Accelerator Facility (JLab), el Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC) y en el futuro Electron Ion Collider (EIC). En dichos experimentos, se espera analizar la estructura hadrónica pero en el régimen de bajas energías de la QCD, donde el modelado es crucial para el entendimiento de las reacciones en ellos.

En esta tesis, empleamos un modelo de interacción de contacto (CI), que se caracteriza por su simplicidad y eficiencia. Este modelo es capaz de replicar la dinámica de QCD en el régimen infrarrojo, generando el espectro de masas de los mesones y bariones en su estado fundamental y algunas excitaciones radiales, al incorporar las características fundamentales de la QCD en el infrarrojo, tales como el confinamiento y la ruptura espontánea de simetría de la simetría quiral (DCSB). Varios estudios previos han utilizado el modelo CI para el análisis de masas de mesones, como se detalla en la Tabla 3.1.

En este trabajo, definimos la CI como una interacción que preserva la simetría vector \times vector basada en un propagador del gluón el cual es independiente del momento. El resultado de esto, son cuatro quarks interactuando en cierto punto del espacio-tiempo. Aprovecharemos esta aproximación para entender la extracción de los Factores de Forma Electromagnéticos y de Transición de diferentes mesones.

Tabla 3.1. Lista de mesones cuyas masas han sido estudiadas a través de un tratamiento SDE/BSE que preserva las simetrías utilizando una CI.

Mesones Pseudoscalares	Ref.	Mesones Escalares	Ref.
π [33–35], K , h_s	[36–39]	σ [35], K_0^* , f_0	[36, 37]
D^0 , D_s^+ , B^+ , B_s^0	[38, 39]	D_0^* , D_{s0}^* , B_0^* , B_{s0}	[40, 41]
B_c^+ , η_c [42, 43], η_b [43]	[38, 39]	B_{c0} , χ_{c0} [42, 43], χ_{b0} [43]	[40, 41]
Mesones Vectoriales	Ref.	Mesones Axial-Vector	Ref.
ρ [34, 35], K_1 , ϕ	[36–39]	a_1 [35], K_1 , f_1	[36, 37]
D^{*0} , D_s^* , B^{*+} , B_s^{*0} ,	[38, 39]	D_1 , D_{s1} , B_1 , B_{s1}	[40, 41]
B_c^* , J/Ψ [42, 43], Υ [43]	[38, 39]	B_{cb} , χ_{c1} [42, 43], χ_{b1} [43]	[40, 41]

3.1. Función de Green en la ecuación de Dirac

Como punto de partida para nuestro desarrollo, empezamos por la ecuación de Dirac. Al estar trabajando con fermiones, queremos estudiar matemáticamente su comportamiento. En estos casos, por el tipo de partículas que estamos trabajando, nos podemos apoyar en la ecuación de Dirac. En general, el problema de encontrar la solución a la ecuación de Dirac dependerá de la complejidad de los términos de interacción o *fuerza*. No obstante, independientemente de esto, siempre será posible utilizar el método de la función de Green para encontrar la solución general, a partir de una solución en particular, convenientemente, la partícula libre. Gracias a las funciones de Green, podemos encontrar la solución general, al integrar la solución particular y la fuente en todo el espacio-tiempo. El objetivo entonces, es encontrar la función de Green de la ecuación de Dirac.

Así, tenemos que la ecuación de Dirac en el espacio libre es,

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi_0(x) = 0, \quad (3.1)$$

donde, ψ_0 es la función de onda libre, despreciando los términos de interacción. No obstante, hay que recordar que la ecuación completa de Dirac en la QED, implica la interacción del campo fermiónico con el campo electromagnético, el cual aparece gracias a la derivada covariante en el acoplamiento mínimo [44]. Así, la teoría de norma completa dentro de la QED contempla la ecuación,

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = -e\cancel{A}(x)\psi(x), \quad (3.2)$$

donde el término $-e\cancel{A}(x)\psi(x)$ es el término de interacción, y la solución exacta será $\psi(x)$.

Necesitamos ahora encontrar la solución a la Ec. (3.2), para esto, utilizaremos el método de Green. Recordemos que el método de Green se basa en que dada una ecuación que involucra un operador lineal diferencial aplicado en un espacio de funciones, como lo es el caso de $\psi(x)$, podemos transformarla a otra ecuación diferencial conocida, $G_0(x, y)$, donde el término de fuente es reemplazado por una función de distribución δ de Dirac. Así, encontramos una función de dos variables diferenciables y continuas (que para nuestro caso asumimos que se cumple) la cual en nuestro ejemplo satisface,

$$(i\cancel{\partial} - m)G_0(x, y) = \delta^4(x - y). \quad (3.3)$$

Suponiendo que se puede encontrar una solución para la Eq. (3.3), la solución de la Ec. (3.2) tendrá la forma,

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \int d^4y G_0(x, y)e\cancel{A}(y)\psi(y). \quad (3.4)$$

Puede verificarse que ésta es una solución válida, al recordar el caso general de la solución de Green,

$$L[u(x)] = \int L[G(x, s)]f(s)ds = \int \delta(x - s)f(s)ds = f(x), \quad (3.5)$$

donde el operador diferencial es representado por $L = (i\cancel{\partial} - m)$, nuestro espacio de funciones

diferenciables está dado por $u(x) = \psi(x)$ y la función resultante como $f(x) = e\mathcal{A}(x)\psi(x)$. Debido a las propiedades de la función delta de Dirac y la definición de la Eq. (3.3), se encuentra al hacer las sustituciones en la Eq. (3.5) conllevan a la ecuación original, mostrando que $G_0(x, y)$ servirá para encontrar $\psi(x)$.

Explícitamente, aplicando el operador diferencial a $\psi(x)$ y apoyados de las ecuaciones anteriores se tiene que,

$$\begin{aligned} (i\mathcal{D} - m)\psi(x) &= \int d^4y (i\mathcal{D} - m)G_0(x, y)e\mathcal{A}(y)\psi(y) \\ &= \int d^4y \delta^4(x - y)e\mathcal{A}(y)\psi(y) = e\mathcal{A}(x)\psi(x), \end{aligned} \tag{3.6}$$

llegando a la ecuación de Dirac original.

Ahora pongamos atención de nuevo en la Eq. (3.3) ya que pasaremos a introducir el concepto de **propagador**. Definimos como propagador a aquella función que nos proporciona la amplitud de probabilidad de que determinada partícula pueda trasladarse de un punto a otro del espacio-tiempo [45].

Para tener una relación más concreta entre ésta definición y la Eq. (3.3) observemos que al $G_0(x, y)$ ser solución de la ecuación diferencial Ec. (3.2) coincide perfectamente con nuestra definición. De hecho, en la práctica es común que a los propagadores se les denomine como funciones de Green o el inverso del operador de la función de onda de la partícula.

En la literatura para obtener el propagador, se trabaja para obtener explícitamente la función de Green adecuada. Por ejemplo, en la ecuación de Schrödinger podemos representar la solución fundamental apoyándonos de una función de Green. En este caso se le llama propagador tanto a la función de Green como al kernel obtenido para expresar la solución. El kernel mencionado nos ayuda en este caso a encontrar la función de onda de un sistema en cualquier punto del espacio-tiempo.

Después de este paréntesis hablando de la función de Green, el kernel y el propagador podemos volver a nuestro ejemplo. Para acercarnos un poco más al propagador del fermión

utilicemos la transformada de Fourier,

$$G_0(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_0(p) e^{-ip \cdot (x-y)}, \quad (3.7)$$

donde x y y son dos puntos del espacio-tiempo, p es el cuadrimomento de la partícula de Dirac y la integración es sobre las cuatro dimensiones del espacio-tiempo de Minkowski.

Ahora apliquemos el operador diferencial a la ecuación anterior y utilicemos la igualdad establecida en la Eq. (3.3),

$$\begin{aligned} (i\cancel{\partial} - m)G_0(x, y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S_0(p) (i\cancel{\partial} - m) e^{-ip \cdot (x-y)} \\ \delta^4(x - y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\cancel{p} - m) S_0(p) e^{-ip \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ahora, podemos encontrar una propiedad elemental de la función delta de Dirac,

$$\delta(w) = \int \frac{dt}{2\pi} e^{iwt}. \quad (3.9)$$

Para que se satisfaga esta propiedad en la Eq. (3.8), se tiene que satisfacer la relación,

$$(\cancel{p} - m)S_0(p) = 1, \quad (3.10)$$

dando como resultado que,

$$S_0(p) = \frac{1}{\cancel{p} - m}. \quad (3.11)$$

Este resultado es el propagador del fermión cuando no se encuentra en un estado ligado. Sin embargo, la concepción de los quarks en el confinamiento que se encuentra en el Modelo de Quarks, tienen que tener contribuciones a la masa que serán necesarias para obtener la masa física del hadrón. A la masa de un fermión que no tiene en cuenta el confinamiento se le llama *masa desnuda*, mientras que aquella que considera los efectos del confinamiento se llama *masa vestida*. El método para encontrar masas de hadrones se basa en un conjunto de

ecuaciones diferenciales acopladas, desarrolladas por los investigadores Julian Schwinger y Freeman Dyson, las Ecuaciones de Schwinger-Dyson. Hasta el momento, nuestras ecuaciones y análisis nos llevan a un caso particular e ideal del propagador de Feynman. A continuación encontraremos propiedades hadrónicas usando series perturbativas.

3.2. Series perturbativas

Antes de pasar a hablar de lleno sobre el propagador del fermión y la masa vestida, hagamos un pequeño paréntesis para abordar las características perturbativas de la función de onda. Volviendo a la función de onda de la Eq. (3.4), podemos hacer un procedimiento análogo para definir la función de onda $\psi(y)$ [46]. Este procedimiento lo podemos extender a ordenes superiores más allá del primer orden de la serie perturbativa. Al hacer este mismo procedimiento, replicaríamos la característica medular que se encuentra teoría perturbativa para aproximarnos asintóticamente al resultado final.

Ahora vamos a unir los conceptos del propagador del fermión con las series perturbativas. A modo de ejemplo, tomaremos la Electrodinámica Cuántica para entender el concepto de las series perturbativas. En particular, nos apoyaremos del hecho que sólo existe un vértice de interacción electrón-fotón y los únicos campos de materia son un el electrón, y un campo de norma, el fotón. Partiendo del diagrama de Feynman para el propagador desnudo el cual se representa en la Fig. 3.1, desarrollamos a manera diagramática la serie perturbativa del propagador como se muestra en la Fig. 3.2. Es importante mencionar que la masa que aparece en el propagador S_0 deberá tener todas las correcciones cuánticas para poder representar la masa del quark en los estados hadrónicos.

$$\bullet \xrightarrow{p} \bullet \quad : \quad S_0(p) = \frac{1}{\not{p} - m} .$$

Figura 3.1. Diagrama de Feynman asociado al propagador desnudo del fermión.

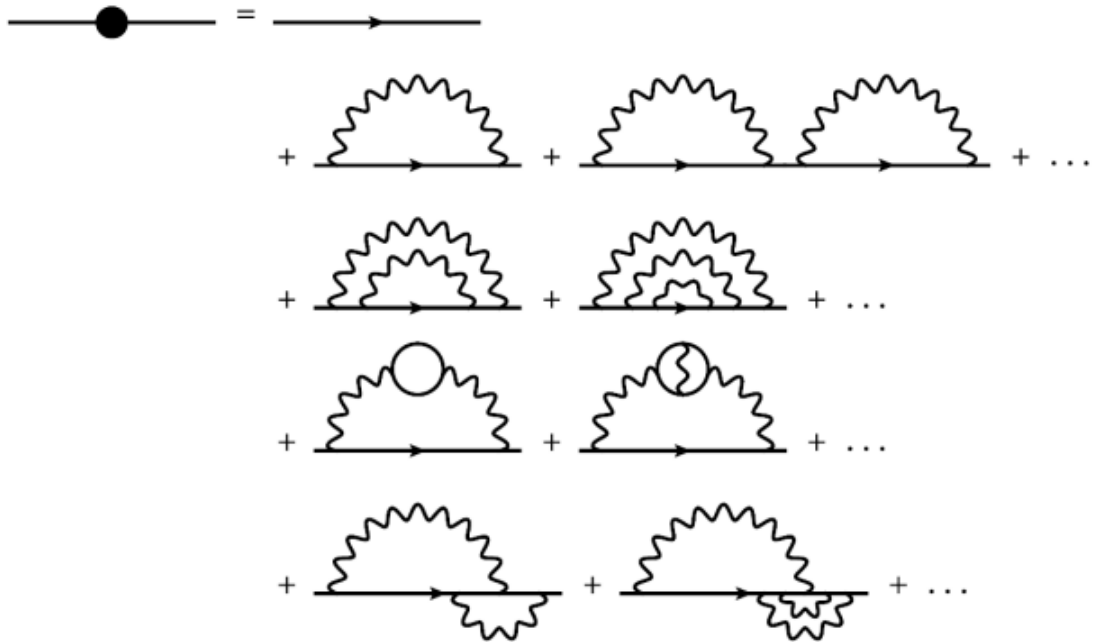


Figura 3.2. Propagador vestido de los fermiones en términos de la serie perturbativa al propagador del fermion.

Así, el diagrama a la izquierda de la igualdad en la Fig. 3.2, representa el propagador total, con m la masa física del fermión que, en el caso de la QED será el electrón, pero para la física hadrónica serán los quarks en el hadrón. Como es de esperarse, observemos que al inicio de la serie perturbativa se tiene al propagador desnudo; posteriormente, se consideran algunas correcciones cuánticas al propagador del electrón, también conocidas como diagramas de auto-energía del electrón, correcciones al propagador del fotón y la corrección al vértice electrón-fotón. En particular, podemos notar que la corrección de la auto-energía, emisión y reabsorción de un fotón, es el único diagrama que contribuye a la primera corrección cuántica (un lazo) al propagador desnudo.

Para ayudarnos un poco más en la descripción diagramática del propagador, nos apoyamos en una clasificación de las series perturbativas. Dicha clasificación permite tener una representación más compacta de los elementos de la serie anterior. Los elementos están representados en la Fig. 3.3. Podemos observar que en la expresión diagramática (a) se asume que el propagador del electrón recibe todas las correcciones cuánticas posibles y son encapsuladas en un término

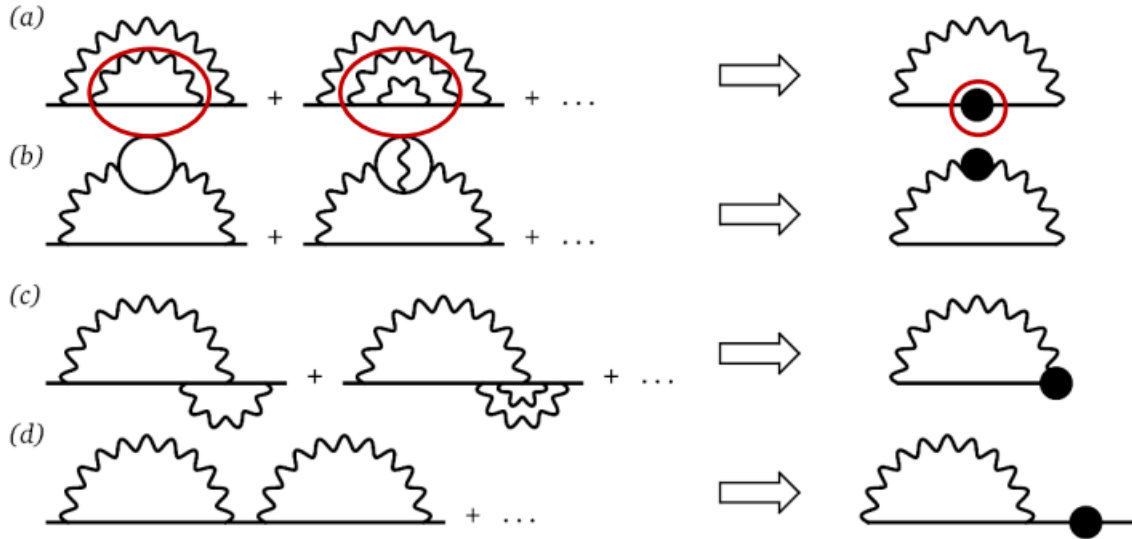


Figura 3.3. Representación diagramática compacta de los elementos de la serie.

representado por el círculo negro en el propagador del electrón. En la expresión (b) se asume que el propagador del fotón recibe diversas contribuciones cuánticas y son representadas por el círculo negro en el propagador del fotón. De manera análoga, la expresión (c) contiene todas las contribuciones cuánticas que modifican el vértice electrón-fotón en el círculo negro. Finalmente, la expresión (d) contempla todas las correcciones cuánticas que no corresponden a las tres correcciones básicas de la Teoría Cuántica de Campos.

A continuación, queremos dar un paso adelante que nos permita sintetizar más a nivel de diagramas de Feynman. Podemos entonces escribir de forma diagramática que el propagador vestido del electrón será la suma del propagador desnudo más todas las correcciones cuánticas posibles. Este resultado está representado esquemáticamente en la Fig. 3.4. Es de particular interés observar que la Fig. 3.4 cuenta con un término que es exactamente igual al que se inició, pero con tres círculos negros están corrigiendo los tres bloques fundamentales de los diagramas de Feynman de la QED, es decir, los propagadores del electrón y el fotón y el vértice de interacción entre el electrón y el fotón. A ese diagrama completo se le conoce como la autoenergía del fermión, $\Sigma(p)$, que en el caso de la QED corresponderá al electrón y para la QCD los quarks, ver Fig. 3.5.

Haciendo uso de dichas expresiones diagramáticas y de las reglas de Feynman podemos pasar a una representación más compacta de la serie perturbativa donde además encontramos explícitamente el término para la autoenergía del electrón y un término extra. Explorando un poco la topología del problema, es posible entender que cualquier corrección posterior a la corrección de la autoenergía, no puede ser otra cosa que una repetición de los mismos términos. Es decir, que el término extra tendrá a primer orden la corrección mínima el propagador desnudo más otra autoenergía del fermión. Es decir, que la serie perturbativa puede entenderse como el propagador del fermión desnudo más una corrección de autoenergía, más dos correcciones de autoenergía, etc. Este proceso puede expresarse diagramáticamente como la Fig. 3.6.

Matemáticamente, esto puede escribirse como,

$$\begin{aligned}
 S(p) &= S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S_0(p)\Sigma(p)S_0(p) + \dots \\
 &= S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p) \underbrace{[S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S_0(p) + \dots]}_{S(p)} \\
 &= S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S(p)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde se ha utilizado el hecho de que $S(p)$ contiene todas las correcciones cuánticas. En general, esta relación debe calcularse hasta cierto orden en la teoría perturbativa, pero se puede entender el proceso iterativo detrás. Es importante recalcar que, si bien es cierto que la ecuación del propagador vestido contiene una masa m y el propagador desnudo tendrá una masa m_0 , debe existir una relación entre ellos dados por las Ecuaciones de Schwinger-Dyson

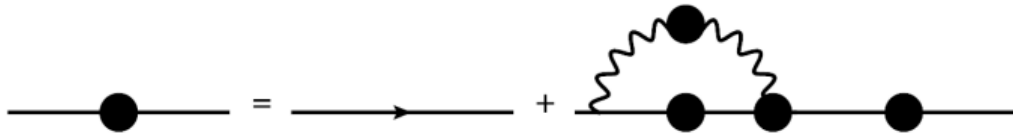


Figura 3.4. Propagador del fermión después de condensar la serie perturbativa como se muestra en la Fig. 3.3.

forma predeterminada, más bien se refieren a un conjunto de varias ecuaciones diferenciales funcionales. Para este trabajo son de importancia para nosotros ya que en la truncación de la aproximación arcoíris nos servirán para la obtención del propagador del quark vestido, y de ahí obtener una relación entre la masa vestida y desnuda de los quarks. Antes de llegar a esa derivación, mostraremos los elementos asociados y su relación con los diagramas de Feynman para la SDE. En general, todos los diagramas que conforman las reglas de Feynman de una teoría tendrán el conjunto de ecuaciones diferenciales como la Ec. (3.12), las cuales se llaman Ecuaciones de Schwinger-Dyson. En particular, la SDE para el propagador del fermión, ya la hemos encontrado y tendrá la forma,

$$S(p) = S_0(p) + S_0(p)\Sigma(p)S(p). \quad (3.13)$$

Por otro lado, de la teoría cuántica de campos, sabemos que el propagador de Feynman de un fermión tiene la forma general, al igual que la Ec. (3.11), como

$$S(p, M_f) \equiv -i\gamma \cdot p \sigma_V(p, M_f) + \sigma_S(p, M_f) \quad (3.14)$$

con

$$\sigma_V(p, M_f) = \frac{1}{p^2 - M_f^2}, \quad \sigma_S(p, M_f) = \frac{M_f}{p^2 - M_f^2} \quad (3.15)$$

representan funciones que acompañan a la parte vectorial y escalar del propagador, respectivamente. Además, se tiene que p y M_f es el momento del fermión en el propagador y la masa del fermión respectivamente. Así, del lado derecho de la ecuación ya tenemos un ansatz pero del lado izquierdo tenemos forzosamente que calcular la autoenergía $\Sigma(p)$, usando alguna aproximación adecuada. En nuestro caso utilizaremos la Interacción de contacto para encontrar la relación de las masas a través de la Ecuación de GAP.

3.4. Interacción de contacto

Se ha mencionado en diversas ocasiones en este documento que para poder modelar los fenómenos en la física hadrónica es necesario optar por algunas suposiciones de la estructura de los hadrones o de sus interacciones. En este trabajo se optará por analizar por utilizar la interacción de contacto para obtener las propiedades de transición de mesones vectoriales a pseudoescalares.

La interacción de contacto se basa en el hecho de que el propagador del gluón satura en el infrarrojo lo cual genera una masa en el gluón. Este hecho de generación de una masa, es similar al hecho que sucede para el bosón W^\pm que fue modelado en la teoría de Fermi como el contacto de corrientes fermiónicas. Así, el propagador entre dos corrientes fermiónicas de quarks puede ser tomado, en analogía con la teoría de Fermi, ver Fig. 3.7, como

$$g^2 D_{\mu\nu}(k) = 4\pi \hat{\alpha}_{\text{IR}} \delta_{\mu\nu} \quad (3.16)$$

donde $\hat{\alpha}_{\text{IR}} = \alpha_{\text{IR}}/m_g^2$. La escala m_g es interpretada como la masa del gluón generada dinámicamente debido al rompimiento de la simetría quiral de la QCD [33, 38, 49]. En particular, nosotros tomaremos la valor aceptado de $m_g = 500$ MeV [50–53]. En el modelo de interacción ed contacto aparece un acoplamiento efectivo $\hat{\alpha}_{\text{IR}}$ en lugar de α_{IR} . En este trabajo se usará la elección de $\alpha_{\text{IR}}/\pi = 0.36$ de tal manera que $\hat{\alpha}_{\text{IR}}$ tenga el mismo valor que en la literatura [33, 38–40].

El uso del modelo de interacción de contacto, Fig. 3.7, ha sido puesto a prueba en el estudio de diversos fenómenos. Este modelo ha sido utilizado para calcular diferentes propiedades de mesones, tales como los factores de forma [54–58].

Uno de los principales objetivos de este trabajo es el utilizar la interacción de contacto en el cálculo de los factores de forma de transición entre mesones vectoriales a pseudoescalares a través de la emisión de un fotón, es decir, $V \rightarrow PS + \gamma$. Para esto, es importante conocer la masa vestida de los quarks, de los mesones vectoriales y pseudoescalares, etc., todo a partir

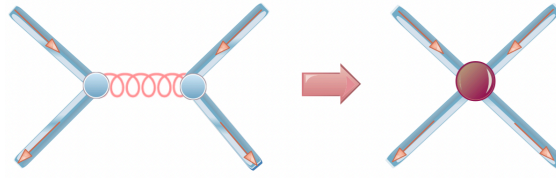


Figura 3.7. Representación diagramática de la interacción empleando la Eq. (3.16).

del modelo de interacción de contacto. Además, a manera de motivación, mostraremos el primer cálculo en general de los factores de forma en mesones pseudoescalares, el factor de forma elástico.

Capítulo 4

Factores de forma de transición

Hasta ahora nos hemos enfocado en poner las bases para poder entender la física de los estados ligados. Hemos analizado la SDE para el propagador de los quarks, obteniendo una relación de recurrencia la cual hay que resolver hasta cierto orden de la teoría. Esta torre de ecuaciones diferenciales acopladas dará lugar al entendimiento de las masas vestidas de los quarks, mesones, bariones, factores de forma elásticos, transición, etc., en la medida que se puedan encontrar soluciones analíticas a las ecuaciones diferenciales.

Los factores de forma predichos por el modelo CI se muestran en la tabla 4.1. Es inmediato observar que los factores de forma elásticos, con excepción de los axiales, ya han sido calculados utilizando este modelo. Sin embargo, los factores de transición entre mesones vectoriales y pseudoescalares han sido poco explorados; de hecho, solo se ha realizado una predicción para el caso que involucra los mesones más ligeros. Es con esta motivación que uno de los objetivos de esta tesis es calcular estas transiciones.

En este capítulo presentaremos el cálculo de masas vestidas de quarks, así como la ecuación de Bethe-Salpeter que nos ayudará en el cálculo de los factores de forma de transición $V \rightarrow PS + \gamma$ mediante el uso del modelo de interacción de contacto.

Elásticos			Transición
Pseudoescalares [54]	Vectoriales [59]	Escalares [54]	$V\gamma PS$
$\pi(u\bar{d})$ [33]	$\rho(u\bar{d})$ [34]	$\sigma(u\bar{d})$	$\rho(u\bar{d}) \rightarrow \gamma\pi(u\bar{d})$ [34]
$K(u\bar{s})$	$K_1(u\bar{s})$	$K_0^*(u\bar{s})$	$K_1(u\bar{s}) \rightarrow \gamma K(u\bar{s})$ (Tesis)
$h_s(s\bar{s})$	$\phi(s\bar{s})$	$f_0(s\bar{s})$	$\phi(s\bar{s}) \rightarrow \gamma h_s(s\bar{s})$ (Tesis)
$D^0(c\bar{u})$	$D^{*0}(c\bar{u})$	$D_0^*(c\bar{u})$	$D^{*0}(c\bar{u}) \rightarrow \gamma D^0(c\bar{u})$ (Tesis)
$D_s^+(c\bar{s})$	$D_s^*(c\bar{s})$	$D_{s0}^*(c\bar{s})$	$D_s^*(c\bar{s}) \rightarrow \gamma D_s^+(c\bar{s})$ (Tesis)
$B^+(u\bar{b})$	$B^{+*}(u\bar{b})$	$B_0^*(u\bar{b})$	$B^{+*}(u\bar{b}) \rightarrow \gamma B^+(u\bar{b})$ (Tesis)
$B_s^0(s\bar{b})$	$B_s^{0*}(s\bar{b})$	$B_{s0}(s\bar{b})$	$B_s^{0*}(s\bar{b}) \rightarrow \gamma B_s^0(s\bar{b})$ (Tesis)
$B_c^+(c\bar{b})$	$B_c^*(c\bar{b})$	$B_{c0}(c\bar{b})$	$B_c^*(c\bar{b}) \rightarrow \gamma B_c^+(c\bar{b})$ (Tesis)
$\eta_c(c\bar{c})$	$J/\Psi(c\bar{c})$	$\chi_{c0}(c\bar{c})$	$J/\Psi(c\bar{c}) \rightarrow \gamma\eta_c(c\bar{c})$ (Tesis)
$\eta_b(b\bar{b})$	$\Upsilon(b\bar{b})$	$\chi_{b0}(b\bar{b})$	$\Upsilon(b\bar{b}) \rightarrow \gamma\eta_b(b\bar{b})$ (Tesis)

Tabla 4.1. Factores de forma elásticos y de transición calculados usando CI

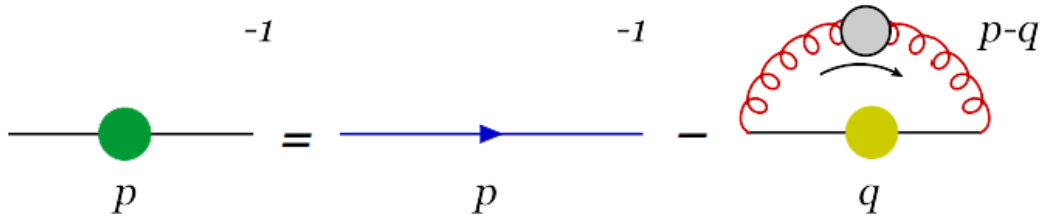


Figura 4.1. Diagrama de Feynman de la SDE necesaria para la obtención de la masa vestida del quark.

4.1. Ecuación de GAP

Todos los desarrollos del capítulo anterior nos son útiles ahora, ya que para encontrar la solución de la ecuación de Schwinger-Dyson del propagador del quark, se requiere el modelado del propagador del gluón, que en este caso será la Ec. (3.16). Partimos de la SDE, representada en la Fig. 4.1¹. Como vimos en la sección anterior para la construcción del propagador del quark, se observa que el propagador del gluón recibe contribuciones cuánticas como resultado de no encontrarse en estado libre, y es a través de este mismo mecanismo que el gluón adquirirá masa.

Así, definimos la ecuación de GAP como aquella ecuación integrodiferencial dentro de la

¹Notar que es el inverso de la SDE del propagador del quark que estamos analizando

fenomenología que establece una relación entre la masa vestida con la masa desnuda de los quarks. En su expresión matemática tenemos,

$$S(p, m_f)^{-1} = i\gamma \cdot p + m_f^{(0)} + \Sigma(p, m_f), \quad (4.1)$$

donde $m_f^{(0)}$ es la masa desnuda del quark y se ha definido la contribución cuántica de la auto-energía $\Sigma(p, m_f)$, correspondiente al último diagrama de Feynman, el cual es expresado de la siguiente manera,

$$\Sigma(p, m_f) = \frac{4}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} g^2 D_{\mu\nu}(p-q) \gamma_\mu S(q, m_f) \Gamma_\nu(q, p). \quad (4.2)$$

En la Ec. (4.2) se tiene explícitamente el propagador del gluón $D_{\mu\nu}(p)$, el vértice vestido entre el quark y el gluón, $\Gamma_\nu(q, p)$ y m_f la masa vestida del quark.

Al querer determinar parámetros clave en la estructura de los hadrones como la masa de los quarks, es importante considerar el confinamiento de estas estructuras². El confinamiento es el fenómeno en el cual los quarks y gluones (partículas con carga de color) no pueden verse de forma libre. Al permanecer por debajo de la temperatura de Hagedorn, la cual equivale a 130-140 MeV por partícula, este fenómeno permanecerá y no se apreciarán partículas en forma libre. Así, tomando en cuenta el modelo de CI, la Ecuación de GAP es,

$$m_f = m_f^{(0)} + m_f \frac{4\hat{\alpha}_{\text{IR}}}{3\pi} \mathcal{C}(m_f^2), \quad (4.3)$$

donde

$$\frac{\mathcal{C}(M^2)}{M^2} = \Gamma(-1, M^2\tau_{\text{UV}}^2) - \Gamma(-1, M^2\tau_{\text{IR}}^2) \quad (4.4)$$

y $\Gamma(\alpha, x)$ es la función Gamma incompleta. Además, se han introducido los reguladores

²Este término también es conocido como confinamiento de color debido a las partículas que involucra. Para este fenómeno, en lugar de ver a las partículas libres las observamos “confinadas” para formar estructuras hadrónicas.

quarks	Z_H	Λ_{UV} [GeV]	$\hat{\alpha}_{IR}$
u, d, s	1	0.905	4.57
c	13.122	2.305	0.35
b	129.513	7.159	0.035

Tabla 4.2. Regulador ultravioleta y constante de acoplamiento para diferentes combinaciones de quarks.

infrarrojos y ultravioletas τ_{IR} y τ_{UV} para hacer la integral finita.

Esta ecuación de GAP tiene solución dependiendo de los parámetros τ_{IR} y τ_{UV} . Es conocido de la literatura las masas de los quarks vestidos tienen que ser ajustadas a los valores experimentales, por tanto, la elección de los parámetros τ deben de satisfacer dicha fenomenología.

Para encontrar la masa vestida de los quarks, consistentes con la fenomenología, se utilizaron los resultados de la Ref. [43], que son resumidos en la Tab. 4.2. En particular, se asumirá para todos los cálculos que el corte en el infrarrojo será el mismo con $\Lambda_{IR} = 0.24$ GeV, y la constante α_{IR} estará determinada por una normalización Z_H que dependerá del estado ligado en cuestión. La relación es $\alpha_{IR} = \alpha_{IRL}/Z_H$ con $\alpha_{IRL} = 4.57$. De esta forma, se resolvió la ecuación de GAP obteniendo los resultados presentados en la Tab. 4.3.

Antes de concluir esta sección es preciso notar que para el quark d se ha utilizado la simetría de isospín que lo relaciona directamente con el quark u . Así, la masa vestida y desnuda para dichos quarks es la misma. Es importante recalcar que el cálculo propuesto en esta tesis extiende el resultado de la Ref. [34], donde se calcula por primera vez en el modelo de CI la transición $\rho \rightarrow \pi\gamma$. En dicho cálculo se obtienen expresiones analíticas las cuales nosotros extenderemos ya que los mesones involucrados en la transición contienen quarks de valencia u y d . Es decir, el objetivo de este trabajo es encontrar los factores de forma de transición para la componente de quarks ligeros (LQ, por sus siglas en inglés), quarks pesados (HQ, por sus siglas en inglés) y la combinación quarks ligero-pesado (HLQ, por sus siglas en inglés) para los grados de libertad de valencia.

$m_u^{(0)} = 0.007$	$m_s^{(0)} = 0.17$	$m_c^{(0)} = 1.08$	$m_b^{(0)} = 3.92$
$m_u = 0.367$	$m_s = 0.53$	$m_c = 1.52$	$m_b = 4.75$

Tabla 4.3. Masas desnudas ($m_f^{(0)}$) y masas vestidas (m_f) de los quarks en GeV, requeridos como valores de entrada en las ecuaciones de Bethe-Salpeter, Factores de Forma Electromagnéticos y de Transición.

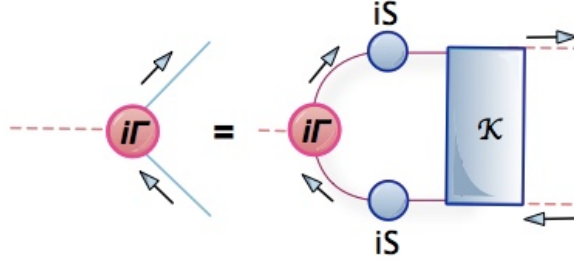


Figura 4.2. Representación diagramática de la ecuación de Bethe-Salpeter. Los círculos azules representan a los propagadores de los quarks vestidos S , los círculos rojos es la amplitud de Bethe-Salpeter Γ de los mesones y, el rectángulo azul es el kernel quark-antiquark, \mathcal{K} .

Ahora, una vez conseguido la masa de los quarks de valencia, se necesita calcular la masa de los mesones. Para esto, usaremos la ecuación de Bethe-Salpeter.

4.2. Ecuación de Bethe-Salpeter

Para estudiar la masa de los mesones, los cuales son nuestro objeto de interés, usaremos el modelado como un sistema de dos fermiones de valencia. Así, modelaremos un problema de estados ligados con un sistema de dos cuerpos. Al analizar este tipo de problema en el formalismo de la QFT, nos apoyamos en una ecuación que involucra en conjunto las ideas de los propagadores y vértices de interacción. Una estrategia común es la de utilizar la ecuación homogénea de Bethe-Salpeter debido al planteamiento del problema de estados ligados para mesones. Dicha ecuación esquemática está representada en la Fig. 4.2.

Matemáticamente, esta expresión tiene la forma,

$$[\Gamma(k; P)]_{tu} = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [\chi(q; P)]_{sr} \mathcal{K}_{tu}^{rs}(q, k; P), \quad (4.5)$$

donde $[\Gamma(k; P)]_{tu}$ representa la amplitud de Bethe-Salpeter (BSA por sus siglas en inglés) del estado ligado y $\chi(q; P) = S(q + P)\Gamma S(q)$ es la función de onda de Bethe-Salpeter; además, r, s, t, u representan índices de color, sabor y espín; y \mathcal{K} es el kernel de dispersión quark-antiquark. Esta ecuación posee soluciones en un conjunto discreto de valores en $P^2 = -M_M^2$ donde el estado ligado existe con masa M_M .

Para poder resolver esta ecuación integral, debemos precisar el tipo de vértice Γ a utilizar ya que eso determinará si la masa del mesón corresponde a un escalar, pseudo-escalar, vectorial o axial-vector. La descomposición de la BSA para los mesones ($f_1\bar{f}_2$) escalar (S), pseudo-escalar (PS), vector (V) y axial-vector (AV) en la CI tiene la siguiente forma³,

$$\begin{aligned}\Gamma_S(P) &= I_D E_S(P), & \Gamma_{PS}(P) &= i\gamma_5 E_{PS}(P) + \frac{1}{2M_R}\gamma_5\gamma \cdot P F_{PS}(P), \\ \Gamma_{V,\mu}(P) &= \gamma_\mu^T E_V(P), & \Gamma_{AV}(P) &= \gamma_5\gamma_\mu^T E_{AV}(P).\end{aligned}$$

donde $E_i(P)$ y $F_i(P)$ con $i \in \{S, PS, V, AV\}$ son conocidas como las amplitudes de Bethe-Salpeter, P es el momento total del mesón, M_R es la masa reducida del sistema de dos cuerpos, es decir, $M_R = m_{\bar{f}_2}m_{f_1}/(m_{\bar{f}_2} + m_{f_1})$ y la componente transversa a P de las matrices γ es,

$$\gamma_\mu^T = \gamma_\mu - \frac{\gamma \cdot P}{P^2} P_\mu. \quad (4.6)$$

Con el fin de calcular las masas de los mesones pseudoescalares y vectoriales, es importante encontrar los parámetros de las masas vestidas de los quarks de valencia en estados condensados con un contenido HLQ y HQ . En el presente trabajo, se encontró que los mejores parámetros están en la Tab. 4.4. Podemos notar que para la generación de masas de estados $q\bar{q}$ se mantuvieron los mismos valores que los encontrados para la descripción de la masa vestida de los quarks.

A continuación, se resuelve computacionalmente la ecuación de Bethe-Salpeter para los

³Es importante notar que en la CI los términos G y H de las Amplitudes de Bethe-Salpeter son cero. La forma más general involucra cuatro términos pero en el presente estudio sólo usaremos la componente dominante E_{PS} y F_{PS} para los mesones pseudoescalares y la componente E_V para los mesones vectoriales.

quarks	Z_H	Λ_{UV} [GeV]
u, d, s	1	0.905
c, u, s	3.034	1.322
c	13.122	2.305
b, u	11.273	3.222
b, s	17.537	3.547
b, c	18.015	6.969
b	129.513	7.159

Tabla 4.4. Parámetros utilizados para encontrar las masas de los mesones pseudoescalares y vectoriales en el modelo de interacción de contacto.

mesones vectoriales y pseudoescalares, obtenemos los resultados presentados en la Tab. 4.5, los cuales concuerdan con la Ref. [40].

Estado ligado $q\bar{q}'$	m_{PS}	E_{PS}	F_{PS}	m_V	E_V
$u\bar{d}$	0.139	3.59	0.47	0.93	1.53
$u\bar{s}$	0.499	3.81	0.59	1.03	1.63
$s\bar{s}$	0.701	4.04	0.75	1.13	1.74
$c\bar{u}$	1.855	3.03	0.37	2.05	1.23
$c\bar{s}$	1.945	3.24	0.51	2.30	0.55
$c\bar{c}$	2.952	2.15	4.40	3.15	0.51
$u\bar{b}$	5.082	3.72	0.21	4.93	2.73
$s\bar{b}$	5.281	2.85	0.21	5.39	1.17
$c\bar{b}$	6.138	2.58	0.39	6.25	1.06
$b\bar{b}$	9.280	2.04	0.39	9.51	0.48

Tabla 4.5. Masas y BSA para mesones pseudoescalares y vectoriales usando la CI y los parámetros definidos en la Tab. 4.4.

Hasta ahora tenemos la formulación para entender las masas de los quarks constituyentes y los mesones. Como el proceso involucra un fotón que será emitido de un quark de valencia, necesitamos identificar el vértice quark-fotón dentro del modelo de CI.

4.3. Vértice quark-fotón

Para analizar la transición entre mesones Vectoriales y Pseudoescalares, se requiere el modelado de un ingrediente más, el vértice de interacción entre el quark y el fotón. El vértice quark-fotón, denotado por $\Gamma_\mu^\gamma(k_+, k_-, m_{f_1})$ con k_\pm el momento del quark en las coordenadas del cono de luz y m_{f_1} la masa del quark vestida, ha sido estudiado en gran profundidad debido a su relevancia fenomenológica, [60–67]. Utilizando la identidad vectorial de Ward-Takahashi,

$$iP_\mu \Gamma_\mu^\gamma(k_+, k_-, m_{f_1}) = S^{-1}(k_+, m_{f_1}) - S^{-1}(k_-, m_{f_1}), \quad (4.7)$$

con P el momento total del mesón, se puede tener una relación entre los propagadores vestidos de quarks y el vértice de interacción. Así, dicho vértice produce otra ecuación inhomogénea de Bethe-Salpeter,

$$\Gamma_\mu^\gamma = \gamma_\mu - \frac{16\pi\alpha_{\text{IR}}}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \gamma_\alpha \chi_\mu(q_+, q, m_{f_1}) \gamma_\alpha, \quad (4.8)$$

donde $\chi_\mu(q_+, q, m_{f_1}) = S(q + P, m_{f_1}) \Gamma_\mu(Q) S(q, m_{f_1})$. Hay que notar que se ha omitido la dependencia funcional del vértice por simplicidad, $\Gamma_\mu^\gamma = \Gamma_\mu^\gamma(Q, m_{f_1})$. Debido a la dependencia funcional del vértice, es posible separarlo en dos componentes, longitudinal y transversal, de la forma siguiente

$$\Gamma_\mu^\gamma = \gamma_\mu^L(Q) P_L(Q^2, m_{f_1}) + \gamma_\mu^T(Q) P_T(Q^2, m_{f_1}), \quad (4.9)$$

con $P_{L,R}$ las funciones longitudinales y transversales a determinar; además se ha decompuesto la matriz γ como $\gamma_\mu^L + \gamma_\mu^T = \gamma_\mu$. Con estas definiciones, podemos encontrar las funciones $P_{L,R}$ como,

$$P_L = 1, \quad P_T = \frac{1}{1 + K_\gamma(Q^2, M_{f_1})}, \quad (4.10)$$

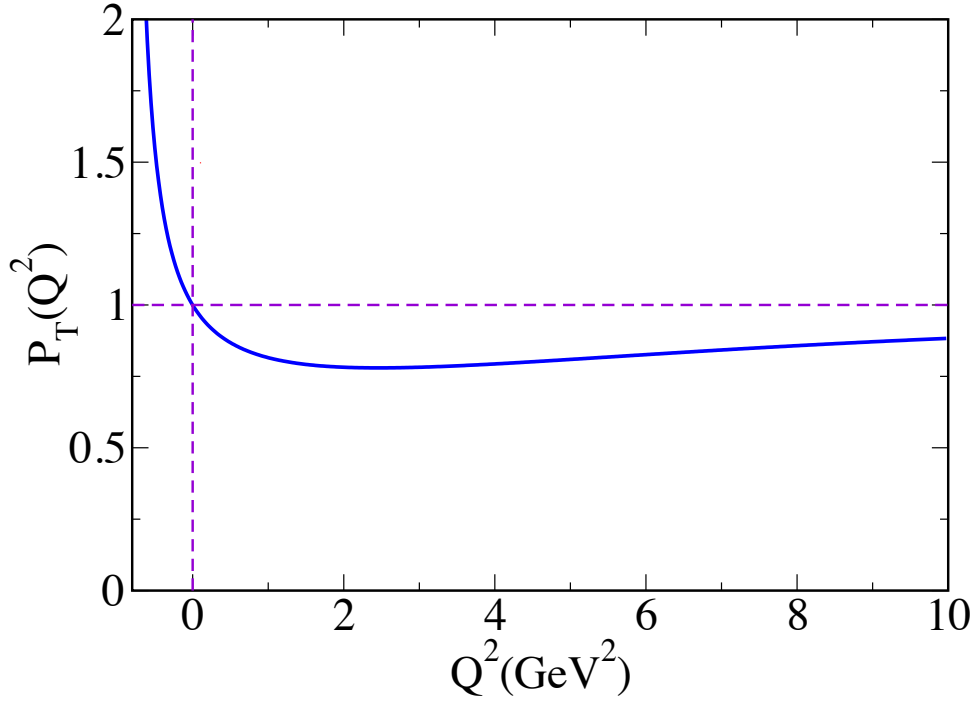


Figura 4.3. Función vestida del vértice transverso quark-fotón, $P_T(Q^2)$, definido en la Eq. (4.10).

donde se han definido,

$$K_\gamma(Q^2, M_{f_1}) = \frac{4\hat{\alpha}_{\text{IR}}}{3\pi} \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha)Q^2 \bar{\mathcal{C}}_1(\omega), \quad (4.11)$$

$$\bar{\mathcal{C}}_1(z) = -\frac{d}{dz}\mathcal{C}(z) = \Gamma(0, z\tau_{\text{UV}}^2) - \Gamma(0, z\tau_{\text{IR}}^2), \quad (4.12)$$

$$\omega = \omega(M_{f_1}^2, \alpha, Q^2) = M_{f_1}^2 + \alpha(1-\alpha)Q^2. \quad (4.13)$$

Antes de concluir esta sección, podemos observar de la Fig. 4.3 que $P_T(Q^2) \rightarrow 1$ en el límite cuando $Q^2 \rightarrow \infty$, lo cual conduce a que el vértice es igual al vértice desnudo γ_μ como era de esperarse.

Con este vértice, las masas vestidas de los quarks y de los mesones y las BSA, podemos calcular el proceso de transición $V \rightarrow \gamma + PS$ y estudiar los radios de carga que predice el modelo de CI.

4.4. Factores de forma de transición $V \rightarrow \gamma + PS$

El proceso de transición entre mesones es de gran interés en la física hadrónica. Diversos experimentos tienen interés en el conocimiento de los factores de forma de transición entre ellos ya que dichas mediciones proporcionan información de la estructura interna de los hadrones. La problemática inicial está motivada con la predicción de la interacción entre un pión (π), un fotón (γ) y el mesón rho (ρ). En la Ref. [34] se aprovecha la simetría de isospín y el modelo de CI para estimar el factor de forma de transición $\rho \rightarrow \gamma + \pi$. En esta tesis se aborda el caso general, la interacción entre un mesón pseudoescalar, un fotón y mesón vectorial. Puntualizamos también que la metodología descrita a continuación puede ser utilizada para cualquier transición de mesones.

La transición de mesones puede ser entendida diagramáticamente mediante el vértice $M_1\gamma M_2$. Para esto nos apoyamos de las reglas de Feynman, con la asignación de momentos expresadas en la Fig. 4.4, las masas vestidas de los quarks y de los mesones, el vértice de interacción quark-fotón y las correspondientes Amplitudes de Bethe-Salpeter.

Como es de esperarse, el diagrama de Feynman en cuestión será otra ecuación de Bethe-Salpeter, ya que nuevamente obtendremos una ecuación recursiva la cual nos servirá para

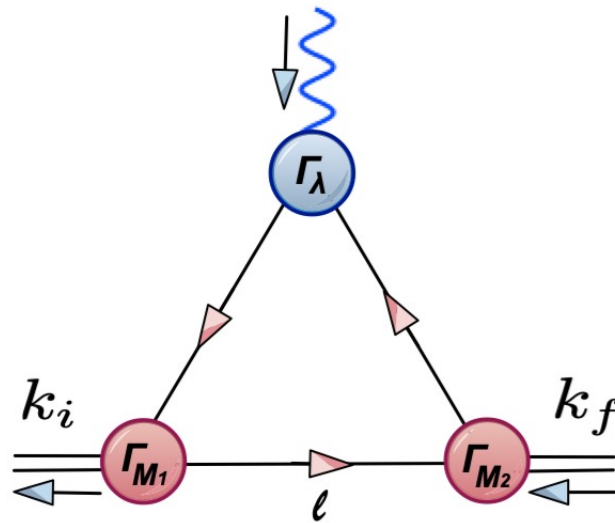


Figura 4.4. Diagrama de triángulo del vértice $M_1\gamma M_2$ que sirve para calcular los factores de forma de transición.

describir éste proceso. Tenemos las Amplitudes de Bethe-Salpeter que describen el estado inicial y el estado final deben ser tratadas como la Ec. (4.6). En este cambio entre el mesón 1 a mesón 2 es donde intervienen los propagadores y un kernel de interacción. Hasta ahora, en palabras más simples, podemos decir que si tenemos un mesón 1 y meson 2, descritos por Amplitudes de Bethe-Salpeter, y el vértice de interacción fotón-quark. Sin embargo no sabemos que forma exacta tiene la solución de la BSE.

Teniendo la BSE para sistemas ligados, sabemos también que este arreglo se compone de un sistema de dos cuerpos el cual pictóricamente está representado a través de un diagrama de Feynman. Diagramáticamente vamos a analizar un vértice de interacción el cual puede representar diversas ecuaciones dependiendo de las interacciones de las partículas en concreto que están implicadas. En dado caso, tal y como se mencionó en la sección anterior, vamos a desarrollar la transición meson vectorial (V) a meson pseudoescalar (PS) y encontrar los Factores de Forma de Transición (TFF, por sus siglas en inglés).

Partiendo del sistema que involucra el vértice de mesones V a PS, $\Lambda^{M_1\gamma M_2, f_1}$, la ecuación para el factor de forma está dada por,

$$\Lambda^{M_1\gamma M_2, f_1} = N_c \int \frac{d^4\ell}{(2\pi)^4} \text{Tr } \mathcal{G}^{M_1\gamma M_2, f_1}, \quad (4.14)$$

donde $M_{1,2}$ son las masas de los mesones vectorial y pseudoescalar respectivamente, N_c es el factor de color, ℓ el momento del lazo circulando en el diagrama y f_1 etiqueta al quark que interactúa con el fotón. Además, en la expresión anterior se han excluido los índices de Dirac y la consideración espacio-tiempo. Esta expresión es general para cualquier transición que se desee calcular, incluso para el caso $M_1 = M_2$, límite en el cual se debe de recuperar las expresiones analíticas de los factores de forma elásticos. En particular, el elemento $\mathcal{G}^{M_1\gamma M_2, f_1}$ puede ser calculada analíticamente como,

$$\mathcal{G}^{M_1\gamma M_2, f_1} = i\Gamma_{M_2}(k_f) S(\ell + k_i, m_{f_1}) i\Gamma_\lambda(Q, m_{f_1}) S(\ell + k_f, m_{f_1}) i\bar{\Gamma}_{M_1}(-k_i) S(\ell, m_{\bar{f}_2}), \quad (4.15)$$

donde podemos apreciar que el vértice $\Lambda^{M_1\gamma M_2, f_1}$ dependerá funcionalmente de las masas de los quarks y los mesones, las amplitudes de Bethe-Salpeter, todos ellos determinados por los parámetros τ_{UV} , τ_{IR} y Z_H . Además, de la notación podemos ver a los índices que simbolizan al quark que interactúa con el fotón etiquetado con f_1 , por otro lado el fermión \bar{f}_2 se mantiene como espectador. Asimismo, indicamos al momento del fotón entrante como Q y por otro lado, utilizamos la conservación del momento para definir $k_i = \ell - Q/2$ y $k_f = \ell + Q/2$ para los momentos de los mesones entrantes y salientes, respectivamente. La señalización de los momentos se indica en el diagram de triángulo de la Fig. (4.4). Teniendo esta definición de variables, podemos calcular la interacción del fotón con el antiquark \bar{f}_2 , y obtendremos a $\mathcal{G}^{M_1\gamma M_2, \bar{f}_2}$ de manera análoga.

Por otro lado, al estar tratando con un sistema donde hay dos partículas pero una sola interactúa con el fotón y la otra está de espectadora, el TFF deberá considerar esa contribución de manera independiente. Así, la contribución total $\mathcal{G}^{M_1\gamma M_2}$ tendrá la forma general siguiente [33],

$$\mathcal{G}^{M_1\gamma M_2}(Q^2) = e_{f_1}\mathcal{G}^{M_1\gamma M_2, f_1}(Q^2) + e_{\bar{f}_2}\mathcal{G}^{M_1\gamma M_2, \bar{f}_2}(Q^2). \quad (4.16)$$

donde e_{f_1} y $e_{\bar{f}_2}$ son las cargas del quark y del antiquark respectivamente⁴. El cálculo de $\mathcal{G}^{M_1\gamma M_2, \bar{f}_2}(Q^2)$ puede obtenerse del re-etiquetado de la función $\mathcal{G}^{M_1\gamma M_2, f_1}(Q^2)$ por $m_{f_1} \leftrightarrow m_{\bar{f}_2}$. Esta sustitución debe reducir al caso con simetría de isospín y fue la primera verificación que se realizó en los cálculos posteriores. De esta manera tenemos una descripción más general del factor de forma, ya que nos acercamos al problema físico a tratar, el caso de mesones conformados por quarks de diferente sabor, HLQ. En particular, como se verá posteriormente, es posible formar estados ligados de quarks neutros de dos maneras: *i*) cuando el mesón está compuesto por quarks de valencia del mismo sabor y *ii*) cuando los quarks de valencia del mesón son de diferente sabor. En el primer caso, la Ec. (4.16) reduce a cero para todo el

⁴Es preciso notar que en la definición del vértice quark-fotón no se incluye la carga eléctrica; es por este motivo que ahora se tomará en cuenta.

rango de Q^2 , mientras que en el segundo caso la expresión conlleva a expresiones no triviales. Así, para el primer caso se usará la prescripción estándar, que es la de tomar un sólo término para definir el TFF total, es decir,

$$\mathcal{G}^{M_1\gamma M_2}(Q^2) = \mathcal{G}^{M_1\gamma M_2, f_1}(Q^2). \quad (4.17)$$

La estructura tensorial de $\mathcal{G}^{M_1\gamma M_2, f_1}(Q^2)$ dependerá fuertemente de las Amplitudes de Bethe-Salpeter que sean introducidas en $\Gamma_M(P)$. En el caso de transición que queremos analizar, la amplitud de Bethe-Salpeter del mesón pseudoescalar no contendrá un índice de Lorentz, mientras que la amplitud del mesón vectorial sí. Además, el vértice del fotón con los quarks vestidos de valencia involucrará otro índice de Lorentz, por lo tanto, la estructura tensorial del vértice $M_1\gamma M_2$, tendrá la forma,

$$\Lambda_{\mu\nu}^{V\gamma PS, f_1} = \frac{g_{V\gamma PS}}{m_V} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_i^\alpha k_f^\beta G^{V\gamma PS, f_1}. \quad (4.18)$$

donde $g_{V\gamma PS}$ es una constante, m_V la masa del mesón vectorial y $G^{V\gamma PS, f_1}$ es el factor de forma de transición $V \rightarrow \gamma + PS$. Es este factor el que nos interesa analizar y encontrar su dependencia funcional a través de la Ec. (4.14). La Eq. (4.18) representa también la interacción en el vértice. Tenemos por lo pronto una ecuación tensorial que involucra a TFF, $G^{V\gamma PS}$, y la integral del lazo correspondiente a la Fig. 4.4, de la cual queremos despejar el TFF. Ya que nuestro tensor tiene índices $\mu\nu$, al otro lado de la igualdad también debe tenerlos, por eso el término $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ con los $k_i^\alpha k_f^\beta$ que contiene a los índices pertinentes para la contracción apropiada.

La Amplitud de Bethe-Salpeter del mesón pseudoescalar contiene dos términos, uno proporcional a E_{PS} y otro proporcional a F_{PS} . Con el fin de facilitar la presentación de resultados, se divide el TFF en dos términos de la forma,

$$G^{V\gamma PS, f_1}(Q^2) = G_E^{V\gamma PS, f_1}(Q^2) + G_F^{V\gamma PS, f_1}(Q^2), \quad (4.19)$$

donde en cada término el subíndice E y F significa que son directamente proporcionales a las amplitudes correspondientes. Para la extracción de las funciones G_E y G_F es preciso contraer los índices con vectores de Lorentz apropiados; los cálculos explícitos están detallados en los Apéndices. Al utilizar la metodología descrita en los apéndices, se encuentra que,

$$\begin{aligned} G_E^{V\gamma PS, f_1}(Q^2) &= \frac{E_{PS} E_V}{\pi^2} M_R \int d\alpha d\beta \bar{\mathcal{C}}_2^{ir}(\omega_3), \\ G_F^{V\gamma PS, f_1}(Q^2) &= \frac{F_{PS} E_V}{8\pi^2} \frac{1}{M_R} \int d\alpha d\beta \left[f_1^{V\gamma PS} \bar{\mathcal{C}}_1^{ir}(\omega_3) + \left(f_0^{V\gamma PS} \omega_3 f_1^{V\gamma PS} \right) \bar{\mathcal{C}}_2^{ir}(\omega_3) \right], \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde

$$\bar{\mathcal{C}}_2^{ir}(z) = \frac{\exp(-z \tau_{UV}) - \exp(-z \tau_{IR})}{2z}, \quad (4.21)$$

con $\tau_{UV,IR}$ son los reguladores en el ultravioleta y el infrarrojo respectivamente, α y β los parámetros de Feynman y las funciones,

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \omega_3(m_{f_1}, m_{\bar{f}_2}, m_{PS}, m_V) \\ &= (1 - \alpha\beta)m_{f_1}^2 + \alpha\beta m_{\bar{f}_2}^2 - \alpha^2\beta(1 - \beta)m_{PS}^2 \\ &\quad - \alpha(\alpha\beta - \alpha - \beta + 1)m_V^2 + \alpha\beta(1 - \alpha)Q^2, \\ f_0^{V\gamma PS} &= 2 - 3\alpha, \\ f_1^{V\gamma PS} &= (1 - \alpha)m_{f_1}^2 + m_{f_1} m_{\bar{f}_2} + \alpha [\alpha\beta(2 - \alpha)(1 - \beta)m_{PS}^2 \\ &\quad - (1 - \beta)(1 - \alpha)^2 m_V^2 + (1 - \alpha)^2 \beta Q^2]. \end{aligned}$$

Para poder analizar la fenomenología de los TFF calculados, podemos graficar las predicciones del modelo de CI con los parámetros de las tablas correspondientes a los reguladores, masas vestidas de quarks y mesones, y las amplitudes de Bethe-Salpeter E_{PS} , F_{PS} y E_V . Se procedió entonces a analizar todas las combinaciones posibles numéricamente, obteniendo los resultados mostrados en la Fig. 4.5. La figura está dividida en tres paneles: *i*) el panel de la izquierda que contiene a todos los mesones con cargados positivamente, *ii*) el panel central que tiene a los mesones neutros conformados por dos quarks del mismo sabor y *iii*) el panel

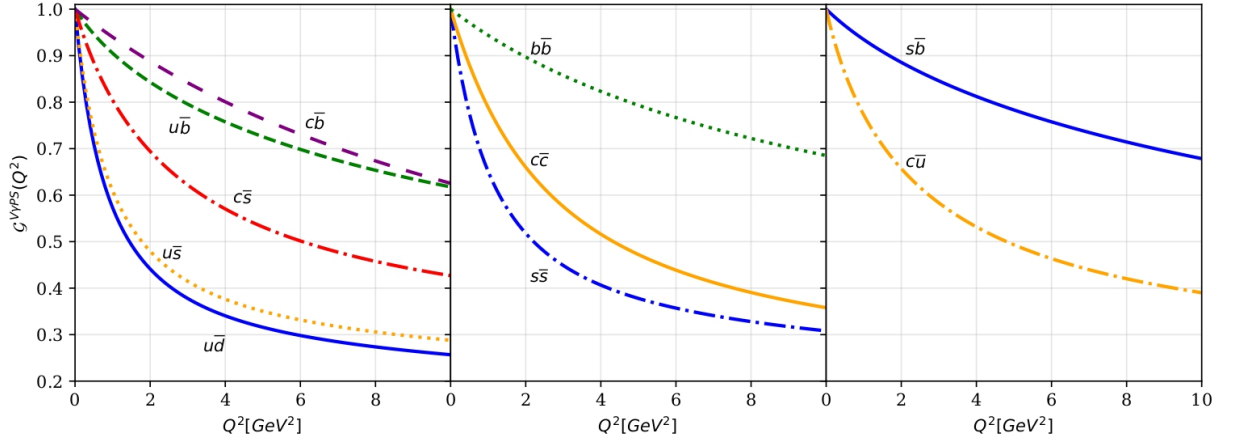


Figura 4.5. Dependencia del factor de forma de transición $G^{M_1 \gamma M_2}$ con respecto a la energía Q^2 para los distintos mesones.

de la derecha que contiene a mesones neutros con dos quarks de diferente sabor.

Para poder dar predicciones que los grupos experimentales puedan corroborar, se calcularon los radios de carga de todos los mesones definidos como,

$$r_{V\gamma PS}^2 = -6 \left. \frac{dG^{M_1 \gamma M_2}(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2 \rightarrow 0}, \quad (4.22)$$

donde es claro que siempre es positivo para todos los valores de la derivada. El cálculo numérico de los radios de carga de los TFF se muestran en la Tab. 4.6.

Podemos notar que los resultados obtenidos presentan una clara tendencia, esta es de que mientras más ligeros sean los quarks de valencia, el radio de carga es mayor. Cada vez que cambiamos por un quark más pesado, el radio de carga disminuye, hasta llegar al caso extremo en el que los mesones estén compuestos de quarks bottom. Matemáticamente esto

Tabla 4.6. Radios de carga de los factores de forma de transición $V \rightarrow \gamma + PS$ calculados con los parámetros de la CI. Todos los valores son reportados en fm.

	$u\bar{d}$	$u\bar{s}$	$s\bar{s}$	$c\bar{u}$	$c\bar{s}$	$u\bar{b}$	$s\bar{b}$	$c\bar{b}$	$c\bar{c}$	$b\bar{b}$
$r_{V\gamma PS}$	0.46	0.43	0.38	0.29	0.26	0.17	0.14	0.12	0.25	0.12

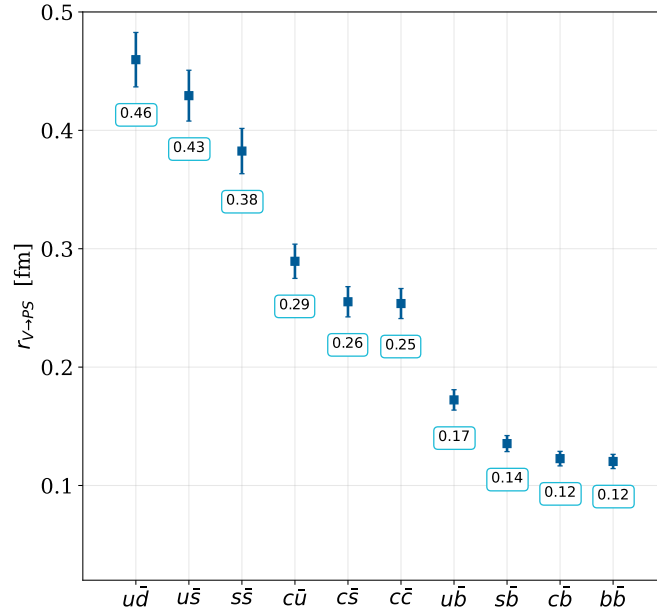


Figura 4.6. Radios de carga de los factores de forma de transición $V \rightarrow \gamma + PS$ en el modelo de CI.

puede expresarse como,

$$r_{u\bar{d}} > r_{u\bar{s}} > r_{c\bar{u}} > r_{u\bar{b}},$$

$$r_{u\bar{s}} > r_{s\bar{s}} > r_{c\bar{s}} > r_{s\bar{b}},$$

$$r_{c\bar{u}} > r_{c\bar{s}} > r_{c\bar{c}} > r_{c\bar{b}},$$

$$r_{u\bar{u}} > r_{s\bar{s}} > r_{c\bar{c}} > r_{b\bar{b}}.$$

Este comportamiento está representado pictóricamente en la Fig. 4.6.

Finalmente, se analizó para todos los TFF la dependencia de los resultados con la variación de los parámetros. Permitiendo que el radio de carga varíe un 5% encontramos que los resultados de la evolución de los TFF no varían demasiado. Esto puede observarse en la Fig. 4.7 donde las bandas representan la variación porcentual establecida. Se presenta el caso para el caso de mesones más ligeros, aunque un comportamiento similar es observado para todo el espectro de mesones.

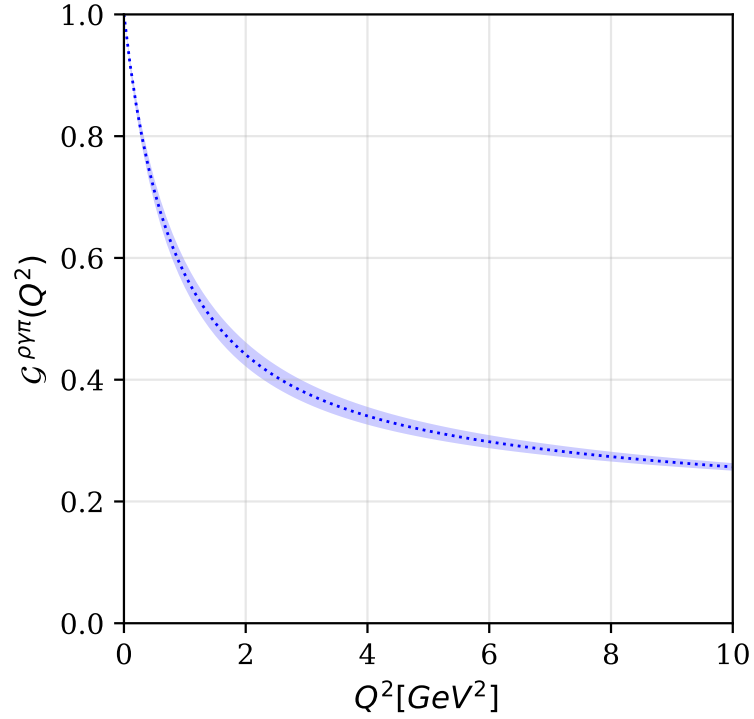


Figura 4.7. Factor de forma de transición $G^{\rho\gamma\pi}$ en función de Q^2 . El valor central de la curva es obtenida usando los parámetros Λ_{UV} de la Tab. 4.4 mientras que la banda representa una variación del 5% en el radio de carga estimado en el modelo de CI.

Concluimos este trabajo mencionando que la metodología descrita aquí puede ser utilizada para la estimación de diferentes transiciones entre mesones. En particular, son de interés fenomenológico los factores de forma de transición entre *i*) mesones axial-vectores y mesones escalares, *ii*) mesones vectoriales y mesones escalares y *iii*) mesones axial-vectores y mesones pseudoescalares, todos ellos calculables en el presente modelo y con quarks de valencia de diferente sabor, haciendo un análisis más robusto. Otro de los beneficios que muestra este modelo, es la posibilidad de calcular factores de forma elásticos de bariones, mediante el conocimiento de la estructura diquark-quark. Estos trabajos son futuras vertientes que el modelo de CI puede proveer en la fenomenología de la física hadrónica.

Capítulo 5

Conclusiones

La Física Hadrónica es un área de la Física de Altas Energías que considera la descripción de estados ligados de quarks y gluones. La Cromodinámica Cuántica que es la teoría subyacente para entender el comportamiento de dichos estados, se encuentra en un régimen no perturbativo y donde el modelado es crucial para el entender las interacciones fundamentales de los hadrones. En el trabajo que se presenta en esta tesis, se estudian los Factores de Forma de Transición entre mesones vectoriales y pseudoescalares mediante el uso de las ecuaciones de Schwinger-Dyson y las ecuaciones de Bethe-Salpeter. Estas ecuaciones necesitan de un *ansatz* fenomenológico que pueda describir la interacción entre los quarks de valencia y los gluones que conforman estos estados ligados. En esta tesis, se explora el potencial del modelo de interacción de contacto para extraer expresiones analíticas de los factores de forma de transición $V \rightarrow \gamma + PS$ y así analizar las predicciones.

En esta tesis se extrajeron funciones analíticas para los factores de forma de transición de tres diferentes categorías de mesones: *i)* mesones cargados, *ii)* mesones neutros compuestos por quarks de valencia del mismo sabor y, *iii)* mesones neutros compuestos por quarks de valencia de diferente sabor. Además, se realizaron las integraciones numéricas para encontrar los radios de carga asociados a dichos mesones encontrando una clara tendencia en la disminución del radio de carga conforme la masa de los quarks de valencia aumenta. Es decir, cuando

se intercambia un quark ligero por uno pesado el radio de carga disminuye y viceversa. Finalmente, se analizó la sensibilidad de las predicciones encontradas al variar los tres parámetros del modelo alrededor de un 5 % del valor calculado del radio de carga, encontrando que experimentan poca desviación con respecto al valor central.

Los factores de forma de transición, además de poder ser comparados con los resultados experimentales, constituyen el primer paso para estudiar los factores de forma bariónicos. Esto se debe a que se ha demostrado que la ecuación de Bethe-Salpeter para mesones es análoga a la de diquarks, con la única diferencia de que en este caso es necesario incluir un factor de color. Por lo tanto, los resultados obtenidos en esta tesis serán de gran relevancia para los factores de forma que se medirán en el laboratorio Jefferson, en el marco de su mejora programada a 12 GeV en los próximos años.

Como trabajo a futuro consideramos que podemos realizar las siguientes tareas en el modelo de CI:

- Estudiar diferentes transiciones entre mesones.
- Calcular los factores de forma elásticos de bariones mediante el esquema diquark-quark, utilizando ambos la interacción de contacto.
- Explorar otros modelos para la región perturbativa.
- Incorporar la temperatura en nuestras ecuaciones.
- Estudiar los factores de forma de las excitaciones radiales de mesones y bariones.
- Realizar predicciones sobre cómo estos factores de forma contribuyen al cálculo del momento magnético anómalo del muón a través de las contribuciones hadrónicas.

Apéndice A

El grupo $SU(2)$ y $SU(3)$

El grupo $SU(2)$ tiene su base conformada por los siguientes elementos matriciales,

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

que en notación de matrices de Pauli, o bien, su relación con estas matrices está dada por,

$$u_1 = i\sigma_1, \quad u_2 = -i\sigma_2, \quad u_3 = i\sigma_3, \quad (\text{A.2})$$

donde

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

Los elementos matriciales cumplen con las siguientes relaciones de conmutación,

$$[u_3, u_1] = 2u_2, \quad [u_1, u_2] = 2u_3, \quad [u_2, u_3] = 2u_1, \quad (\text{A.4})$$

donde podemos observar también que el producto de cualquier par de generadores distintos

da como resultado otro generador.

Para el caso de $SU(3)$, similar al grupo $SU(2)$. tenemos como generadores a las matrices de Gell-Mann. Al ser un grupo de dimensión 8, tendremos esta cantidad de elementos en su base los cuales son,

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Con éstas, podemos definir a las matrices T_a de los generadores del grupo de Lie $SU(3)$ con la relación:

$$T_a = \frac{\lambda_a}{2}, \quad a = 1, \dots, 8, \quad (\text{A.5})$$

donde se satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[T_a, T_b] = i \sum_{c=1}^8 f_{abc} T_c, \quad (\text{A.6})$$

con f_{abc} determinadas como las constantes de estructura cuyos valores son

$$\begin{aligned} f^{123} &= 1 \\ f^{147} &= f^{165} = f^{246} = f^{257} = f^{354} = f^{376} = \frac{1}{2} \\ f^{458} &= f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned} \tag{A.7}$$

y similarmente como las matrices de Pauli, estas son de traza nula, es decir, $\text{tr}(T_a) = 0$.

Apéndice B

Matrices de Dirac

La ecuación de Dirac involucra el manejo de las matrices de Dirac, γ^μ . En este apéndice se presentan de la representación de Dirac, de Weyl o quiral y la representación de Majorana.

- Representación de Dirac. En esta representación las cuatro matrices γ^μ son,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & -\mathbf{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

donde

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

son las matrices de Pauli. A partir de éstas, es posible definir la matriz,

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

- Representación de Weyl. Aquí, las matrices γ^μ son,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \\ \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

■ Representación de Majorana

En esta representación las cuatro matrices γ^μ son,

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & \sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} i\sigma^3 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & i\sigma^3 \end{pmatrix}, & \gamma^2 &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 2} & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \\ \gamma^3 &= \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & -i\sigma^1 \end{pmatrix}, & \gamma^5 &= \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

En todas las definiciones anteriores se ha usado la matriz identidad y la matriz cero de dimensión 2×2 con notación $\mathbf{1}_{2 \times 2}$ y $\mathbf{0}_{2 \times 2}$, respectivamente.

Bibliografía

- [1] Haubold, Hans; Mathai, A. M. (1998). «Microcosmos: From Leucippus to Yukawa». Structure of the Universe. Common Sense Science.
- [2] J. J. Thomson, “Cathode rays,” *Phil. Mag. Ser. 5* **44** (1897), 293-316
doi:10.1080/14786449708621070
- [3] E. Rutherford, “The scattering of alpha and beta particles by matter and the structure of the atom,” *Phil. Mag. Ser. 6* **21** (1911), 669-688 doi:10.1080/14786440508637080
- [4] J. Chadwick, “Possible Existence of a Neutron,” *Nature* **129** (1932), 312
doi:10.1038/129312a0
- [5] M. Gell-Mann, “A Schematic Model of Baryons and Mesons,” *Phys. Lett.* **8** (1964), 214-215 doi:10.1016/S0031-9163(64)92001-3
- [6] G. Zweig, “An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2,” doi:10.17181/CERN-TH-412
- [7] G. Zweig, “An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1,” doi:10.17181/CERN-TH-401
- [8] Weinberg, Steven (1987). Elementary particles and the laws of physics : the 1986 Dirac memorial lectures
- [9] CODATA Internationally recommended 2018 values of the Fundamental Physical Constants.

- [10] Tanabashi, M.; et al. (2018). «Review of particle physics» (pdf). Physics Review D (Particle Data Group) 98 (030001). doi:10.1103/PhysRevD.98.030001.
- [11] Peltoniemi, J.; Sarkamo, J. (2005). “Laboratory measurements and limits for neutrino properties”. The Ultimate Neutrino Page.
- [12] P. W. Higgs, “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons,” Phys. Rev. Lett. **13** (1964), 508-509 doi:10.1103/PhysRevLett.13.508
- [13] F. Englert and R. Brout, “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons,” Phys. Rev. Lett. **13** (1964), 321-323 doi:10.1103/PhysRevLett.13.321
- [14] P. A. M. Dirac, “The quantum theory of the electron,” Proc. Roy. Soc. Lond. A **117** (1928), 610-624 doi:10.1098/rspa.1928.0023
- [15] Arteaga, I. Cottin, G., Mella, B., Mella, C. (Eds). (2017) Ideas desde el Reino Unido: Críticas y Propuestas para el desarrollo de Chile. ISBN: 978-956-368-771-2
- [16] P. Skands, “Introduction to QCD,” doi:10.1142/9789814525220_0008 [arXiv:1207.2389 [hep-ph]].
- [17] D. J. Gross and F. Wilczek, “*Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories,*” Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343. doi:10.1103/PhysRevLett.30.1343
- [18] H. D. Politzer, “*Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?,*” Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346. doi:10.1103/PhysRevLett.30.1346
- [19] Patrascioiu, A., Seiler, E. Running coupling constant in abelian and non-abelian models. Nuov Cim A **107**, 765–773 (1994).
- [20] Gell-Mann, M. (November 1953). “Isotopic spin and new unstable particles” (PDF). Phys. Rev. **92** (3): 833–834. Bibcode:1953PhRv...92..833G. doi:10.1103/PhysRev.92.833.

- [21] Lipkin, H.J. (1987). “New possibilities for exotic hadrons — anticharmed strange baryons”. *Physics Letters B.* **195** (3): 484–488. Bibcode:1987PhLB..195..484L. doi:10.1016/0370-2693(87)90055-4
- [22] Muir, H. (2 July 2003). “Pentaquark discovery confounds sceptics”. *New Scientist*. Retrieved 2010-01-08.
- [23] Cohen, T.D.; Hohler, P.M.; Lebed, R.F. (2005). “On the Existence of Heavy Pentaquarks: The large N_c and Heavy Quark Limits and Beyond”. *Physical Review D.* **72** (7): 074010. arXiv:hep-ph/0508199. Bibcode:2005PhRvD..72g4010C. doi:10.1103/PhysRevD.72.074010. S2CID 20988932.
- [24] Good, R. H.; Matsen, R. P.; Muller, F.; Piccioni, O.; Powell, W. M.; White, H. S.; Fowler, W. B.; Birge, R. W. (15 November 1961). “Regeneration of Neutral K Mesons and Their Mass Difference”. *Physical Review.* **124** (4): 1223–1239.
- [25] Light Unflavored Mesons as appearing in Olive, K. A.; et al. (PDG) (2014). “Review of Particle Physics”. *Chinese Physics C.* **38** (9): 090001. arXiv:1412.1408. Bibcode:2014ChPhC..38i0001O. doi:10.1088/1674-1137/38/9/090001. S2CID 118395784.
- [26] Georgi, Howard (1990). “Vector realization of chiral symmetry”. *Nuclear Physics B.* **331** (2). Elsevier BV: 311–330. Bibcode:1990NuPhB.331..311G. doi:10.1016/0550-3213(90)90210-5. ISSN 0550-3213
- [27] C. Amsler et al. (2008): Quark Model
- [28] R. Aaij et al. (LHCb collaboration) (2015). “Observation of $J/\psi p$ resonances consistent with pentaquark states in $\Lambda_b^0 \rightarrow J/\psi K^- p$ decays”. *Physical Review Letters.* 115 (7): 072001. arXiv:1507.03414. Bibcode:2015PhRvL.115g2001A. doi:10.1103/PhysRevLett.115.072001. PMID 26317714. S2CID 119204136
- [29] R. Aaij et al. (LHCb collaboration) (2019). “Observation of a narrow pentaquark state, $P_c(4312)^+$, and of two-peak structure of the $P_c(4450)^+$ ”. *Physical Review Letters.* 122

- (22): 222001. arXiv:1904.03947. doi:10.1103/PhysRevLett.122.222001. PMID 31283265. S2CID 102351520.
- [30] “Observation of a strange pentaquark, a doubly charged tetraquark and its neutral partner”. July 5, 2022. Retrieved July 5, 2022.
- [31] Ne’eman, Y. (August 1961). “Derivation of strong interactions from a gauge invariance”. *Nuclear Physics*. 26 (2). Amsterdam: North-Holland Publishing Co.: 222–229
- [32] Gell-Mann, Murray (15 March 1961). *The Eightfold Way: A theory of strong interaction symmetry (Report)*. Office of Scientific and Technical Information (OSTI). doi:10.2172/4008239.
- [33] L. X. Gutierrez-Guerrero, A. Bashir, I. C. Cloet and C. D. Roberts, “Pion form factor from a contact interaction,” *Phys. Rev. C* **81** (2010), 065202 doi:10.1103/PhysRevC.81.065202 [arXiv:1002.1968 [nucl-th]].
- [34] H. L. L. Roberts, A. Bashir, L. X. Gutierrez-Guerrero, C. D. Roberts and D. J. Wilson, “pi- and rho-mesons, and their diquark partners, from a contact interaction,” *Phys. Rev. C* **83** (2011), 065206 doi:10.1103/PhysRevC.83.065206 [arXiv:1102.4376 [nucl-th]].
- [35] H. L. L. Roberts, L. Chang, I. C. Cloet and C. D. Roberts, “Masses of ground and excited-state hadrons,” *Few Body Syst.* **51** (2011), 1-25 doi:10.1007/s00601-011-0225-x [arXiv:1101.4244 [nucl-th]].
- [36] H. X. Chen, W. Chen, X. Liu, Y. R. Liu and S. L. Zhu, “A review of the open charm and open bottom systems,” *Rept. Prog. Phys.* **80** (2017) no.7, 076201 doi:10.1088/1361-6633/aa6420 [arXiv:1609.08928 [hep-ph]].
- [37] Y. Lu, C. Chen, C. D. Roberts, J. Segovia, S. S. Xu and H. S. Zong, “Parity partners in the baryon resonance spectrum,” *Phys. Rev. C* **96** (2017) no.1, 015208 doi:10.1103/PhysRevC.96.015208 [arXiv:1705.03988 [nucl-th]].

- [38] L. X. Gutiérrez-Guerrero, A. Bashir, M. A. Bedolla and E. Santopinto, “Masses of Light and Heavy Mesons and Baryons: A Unified Picture,” *Phys. Rev. D* **100** (2019) no.11, 114032 doi:10.1103/PhysRevD.100.114032 [arXiv:1911.09213 [nucl-th]].
- [39] P. L. Yin, C. Chen, G. Krein, C. D. Roberts, J. Segovia and S. S. Xu, “Masses of ground-state mesons and baryons, including those with heavy quarks,” *Phys. Rev. D* **100** (2019) no.3, 034008 doi:10.1103/PhysRevD.100.034008 [arXiv:1903.00160 [nucl-th]].
- [40] L. X. Gutiérrez-Guerrero, G. Paredes-Torres and A. Bashir, “Mesons and baryons: Parity partners,” *Phys. Rev. D* **104** (2021) no.9, 094013 doi:10.1103/PhysRevD.104.094013 [arXiv:2109.09058 [hep-ph]].
- [41] P. L. Yin, Z. F. Cui, C. D. Roberts and J. Segovia, “Masses of positive- and negative-parity hadron ground-states, including those with heavy quarks,” *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) no.4, 327 doi:10.1140/epjc/s10052-021-09097-6 [arXiv:2102.12568 [hep-ph]].
- [42] M. A. Bedolla, J. J. Cobos-Martínez and A. Bashir, “Charmonia in a contact interaction,” *Phys. Rev. D* **92** (2015) no.5, 054031 doi:10.1103/PhysRevD.92.054031 [arXiv:1601.05639 [hep-ph]].
- [43] K. Raya, M. A. Bedolla, J. J. Cobos-Martínez and A. Bashir, “Heavy quarkonia in a contact interaction and an algebraic model: mass spectrum, decay constants, charge radii and elastic and transition form factors,” *Few Body Syst.* **59** (2018) no.6, 133 doi:10.1007/s00601-018-1455-y [arXiv:1711.00383 [nucl-th]].
- [44] Griffiths, D.J. (2008). *Introduction to Elementary Particles* (2nd ed.). Wiley-VCH. ISBN 978-3-527-40601-2.
- [45] *The mathematics of PDEs and the wave equation*, p 32., Michael P. Lamoureux, University of Calgary, Seismic Imaging Summer School, August 7–11, 2006, Calgary.
- [46] Holmes, Mark H. (2013). *Introduction to perturbation methods* (2nd ed.). New York: Springer. ISBN 978-1-4614-5477-9. OCLC 821883201.

- [47] J. S. Schwinger, “On the Green’s functions of quantized fields. 1.,” *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37** (1951), 452-455 doi:10.1073/pnas.37.7.452
- [48] J. S. Schwinger, “On the Green’s functions of quantized fields. 2.,” *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37** (1951), 455-459 doi:10.1073/pnas.37.7.455
- [49] P. O. Bowman, U. M. Heller, D. B. Leinweber, M. B. Parappilly and A. G. Williams, “Unquenched gluon propagator in Landau gauge,” *Phys. Rev. D* **70** (2004), 034509 doi:10.1103/PhysRevD.70.034509 [arXiv:hep-lat/0402032 [hep-lat]].
- [50] P. Boucaud, J. P. Leroy, A. L. Yaouanc, J. Micheli, O. Pene and J. Rodriguez-Quintero, “The Infrared Behaviour of the Pure Yang-Mills Green Functions,” *Few Body Syst.* **53** (2012), 387-436 doi:10.1007/s00601-011-0301-2 [arXiv:1109.1936 [hep-ph]].
- [51] A. C. Aguilar, D. Binosi, C. T. Figueiredo and J. Papavassiliou, “Evidence of ghost suppression in gluon mass scale dynamics,” *Eur. Phys. J. C* **78** (2018) no.3, 181 doi:10.1140/epjc/s10052-018-5679-2 [arXiv:1712.06926 [hep-ph]].
- [52] D. Binosi and J. Papavassiliou, “Coupled dynamics in gluon mass generation and the impact of the three-gluon vertex,” *Phys. Rev. D* **97** (2018) no.5, 054029 doi:10.1103/PhysRevD.97.054029 [arXiv:1709.09964 [hep-ph]].
- [53] F. Gao, S. X. Qin, C. D. Roberts and J. Rodriguez-Quintero, “Locating the Gribov horizon,” *Phys. Rev. D* **97** (2018) no.3, 034010 doi:10.1103/PhysRevD.97.034010 [arXiv:1706.04681 [hep-ph]].
- [54] R. J. Hernández-Pinto, L. X. Gutiérrez-Guerrero, A. Bashir, M. A. Bedolla and I. M. Higuera-Angulo, “Electromagnetic form factors and charge radii of pseudoscalar and scalar mesons: A comprehensive contact interaction analysis,” *Phys. Rev. D* **107** (2023) no.5, 054002 doi:10.1103/PhysRevD.107.054002 [arXiv:2301.11881 [hep-ph]].

- [55] R. H. Pinto, M. Bedolla-Hernandez, L. Gutierrez-Guerrero and A. Bashir, “Elastic meson form factors in a unified scheme,” *Rev. Mex. Fis. Suppl.* **3** (2022) no.3, 0308106 doi:10.31349/SuplRevMexFis.3.0308106 [arXiv:2201.06150 [hep-ph]].
- [56] B. A. Zamora, E. C. Martínez, J. Segovia and J. J. Cobos-Martínez, “Contact interaction model for the η and η' mesons in a Schwinger-Dyson-Bethe-Salpeter approach to QCD: Masses, decay widths, and transition form factors,” *Phys. Rev. D* **107** (2023) no.11, 114031 doi:10.1103/PhysRevD.107.114031 [arXiv:2304.14887 [hep-ph]].
- [57] H. Dang, Z. Xing, M. A. Sultan, K. Raya and L. Chang, “Chiral anomaly and the pion transition form factor: Beyond the cutoff,” *Phys. Rev. D* **108** (2023) no.5, 054031 doi:10.1103/PhysRevD.108.054031 [arXiv:2306.04307 [hep-ph]].
- [58] X. Wang, Z. Xing, J. Kang, K. Raya and L. Chang, “Pion scalar, vector, and tensor form factors from a contact interaction,” *Phys. Rev. D* **106** (2022) no.5, 054016 doi:10.1103/PhysRevD.106.054016 [arXiv:2207.04339 [hep-ph]].
- [59] R. J. Hernández-Pinto, L. X. Gutiérrez-Guerrero, M. A. Bedolla and A. Bashir, “Electric, Magnetic and Quadrupole Form Factors and Charge Radii of Vector Mesons: From Light to Heavy Sector in a Contact Interaction,” [arXiv:2410.23813 [hep-ph]].
- [60] V. M. B. Guzmán and A. Bashir, “One-loop fermion-photon vertex in arbitrary gauge and dimensions: A novel approach,” *Phys. Rev. D* **107** (2023) no.7, 073008 doi:10.1103/PhysRevD.107.073008 [arXiv:2304.03719 [hep-ph]].
- [61] J. R. Lessa, F. E. Serna, B. El-Bennich, A. Bashir and O. Oliveira, “Gauge dependence of the quark gap equation: An exploratory study,” *Phys. Rev. D* **107** (2023) no.7, 074017 doi:10.1103/PhysRevD.107.074017 [arXiv:2202.12313 [hep-ph]].
- [62] L. Albino, A. Bashir, L. X. G. Guerrero, B. E. Bennich and E. Rojas, “Transverse Takahashi Identities and Their Implications for Gauge Independent Dy-

namical Chiral Symmetry Breaking,” Phys. Rev. D **100** (2019) no.5, 054028 doi:10.1103/PhysRevD.100.054028 [arXiv:1812.02280 [nucl-th]].

- [63] A. Bashir, A. Raya and S. Sanchez-Madriral, “Chiral Symmetry Breaking and Confinement Beyond Rainbow-Ladder Truncation,” Phys. Rev. D **84** (2011), 036013 doi:10.1103/PhysRevD.84.036013 [arXiv:1108.4748 [hep-ph]].
- [64] A. Bashir, Y. Concha-Sanchez and R. Delbourgo, “3-point off-shell vertex in scalar QED in arbitrary gauge and dimension,” Phys. Rev. D **76** (2007), 065009 doi:10.1103/PhysRevD.76.065009 [arXiv:0707.2434 [hep-th]].
- [65] A. Bashir and R. Delbourgo, “The Nonperturbative propagator and vertex in massless quenched QED(d),” J. Phys. A **37** (2004), 6587-6598 doi:10.1088/0305-4470/37/25/011 [arXiv:hep-ph/0405018 [hep-ph]].
- [66] A. Bashir, A. Kizilersu and M. R. Pennington, “Analytic form of the one loop vertex and of the two loop fermion propagator in three-dimensional massless QED,” [arXiv:hep-ph/9907418 [hep-ph]].
- [67] A. Bashir and M. R. Pennington, “Constraint on the QED vertex from the mass anomalous dimension $\gamma(m) = 1$,” Phys. Rev. D **53** (1996), 4694-4697 doi:10.1103/PhysRevD.53.4694 [arXiv:hep-ph/9510436 [hep-ph]].